# Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

**Helmut Hasse**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, H. Rohrbach, W. Schmeidler

Band 189

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1952

Archiv-Nr. 180352
Druck von Paul Dünnhaupt, Köthen
Printed in Germany

## Inhaltsverzeichnis des Bandes 189


Seite

**Armsen, Paul,** Verallgemeinerungen von Sequenzen in Permutationen . . . . . 77

**Hornich, Hans,** Zur Lösbarkeit von gewissen elliptischen Differentialgleichungen 204

**Jaeckel, K.,** Über die Eigenlösungen gewisser Integralgleichungen der Potentialtheorie . . . . . 141

**Jonas, Hans,** Die allgemeinen äquidistanten Transformationen der von Bianchi entdeckten isometrischen Paare Tschebyschefscher Netze . . . . . 207

**Kanold, Hans-Joachim,** Über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen . . . . . 243

**Kasch, Friedrich,** Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern . . 150

**Kropp, Gerhard,** Lalouvères Quadratura circuli . . . . . 1

**Krull, Wolfgang,** Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen . . . 118

**Lyra, Gerhard,** Über eine Konvergenzfrage bei der Auflösung linearer Differentialgleichungen in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit . . . . . 238

**Mohr, Ernst,** Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne . 129

— —, Nachtrag zu meiner Arbeit: Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete . . . . . 250

**Nakayama, Tadasi,** On construction and characterization of Galois algebras with given Galois groups . . . . . 100

**Reeb, G.,** Sur les éléments de contact linéaires du second ordre attachés à un système différentiel . . . . . 186

**Sade, Albert,** Omission dans les listes de Norton pour les carrés 7 · 7 . . . . . 190

**Schmidt, Adam,** Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . . 160

**Schöneborn, Heinz,** Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. I . . . . . 168

— —, Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. II . . . . . 193

**Tietz, Horst,** Eine Rekursionsformel der Faberschen Polynome . . . . . 192

— —, Beweis der Konvergenz eines Verfahrens von W. Bartky zur Berechnung von bestimmten Integralen . . . . . 246

## Ausgabedaten der Hefte von Bd. 189

| | | | |
|---|---|---|---|
| Heft 1/2 | ausgegeben am | 14. Dezember | 1951 |
| Heft 3 | ausgegeben am | 25. März | 1952 |
| Heft 4 | ausgegeben am | 12. Mai | 1952 |

# Lalouvères Quadratura circuli.

Eine Studie zur Geschichte der Integralrechnung*.

Von *Gerhard Kropp* in Berlin.

*Pendens libra polo et terrenae nescia faecis*
*ponderibus determinat omnia iustis.*
(Auf dem Titelblatt der Quadratura circuli)

## § 1. Leben und Wirken.

*Antoine de Lalouvère* S. J. (1600—1664) — auch geschrieben De la Loubère, Laloubère, Lalouère oder, wie in dem vorliegenden Werke, *Antonius Lalovera* — ist hauptsächlich im Zusammenhang mit dem durch Pascals Preisausschreiben hervorgerufenen Zykloidenstreit (1658) in die Mathematikgeschichte eingegangen[1]. Man weiß, daß Fermats Schrift *De linearum curvarum cum rectis lineis comparatione dissertatio geometrica*[2] als Anhang zu Lalouvères *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris* (Toulouse 1660) erschien[3]. Hingegen ist das früheste größere mathematische Werk Lalouvères, die *Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis* aus dem Jahre 1651, fast unbekannt geblieben. Moritz Cantor berichtet von dieser Arbeit nur, daß sie auf der Umkehrung der Guldinischen Regel beruhe; „es scheint ein gewisser Mut dazu zu gehören, diese und die späteren Schriften Lalouvères zu lesen".[4]

Wir wissen[5], daß Lalouvère am 24. August 1600 in Rieux geboren wurde, seit dem 9. Juli 1620 dem Jesuitenorden angehörte und dann als Professor der Humaniora, der

---

* Dieser Arbeit liegt meine Inaugural-Dissertation: *Die Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum des Antoine de Lalouvère (Antonius Lalovera)* zugrunde, die 1944/45 von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Berlin (D 1) angenommen wurde.

Eine erste Orientierung über Lalouvères geometrische Integrationsmethode habe ich im Anhang meines Buches: *Beiträge zur Philosophie, Pädagogik und Geschichte der Mathematik* (Berlin 1948) gegeben. Vergleiche auch meinen Aufsatz: *Der unbekannte Lalouvère*, Blick in die Wissenschaft 1 (1948), S. 224—226.

[1] P. Tannery: *Pascal et Lalouvère*. Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux (3) 5 (1890), S. 55—84. Vergleiche auch M. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II [2], Leipzig 1900, S. 907, 909—10; H. G. Zeuthen: *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, deutsche Ausgabe, Leipzig 1903, S. 39—40; ferner die zahlreichen Erwähnungen in den Ausgaben der Werke von Fermat, Huygens, Pascal, Torricelli und in den Gesammelten Schriften von Wallis.

[2] P. de Fermat: *Oeuvres* éd. P. Tannery et Ch. Henry, Band I. Paris 1891, S. 211—54.

[3] M. Cantor: a. a. O. [1], S. 869, 897.

[4] M. Cantor: a. a. O. [1], S. 896, 897.

[5] E. Merlieux in *Nouvelle Biographie générale*, Band 29. Paris 1862, Sp. 30—32. — J. C. Poggendorff: *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, Band I. Leipzig 1863, Sp. 1501. — A. A. de Backer - C. Sommervogel: *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, Band V. Brüssel, Paris 1894, Sp. 32—33.

Rhetorik, des Hebräischen, der Theologie und der Mathematik in Toulouse wirkte, wo er am 2. September 1664 starb.

An mathematischen Schriften sind außer den schon genannten beiden Hauptwerken noch vorhanden:

*Propositiones geometricae sex quibus ostenditur ex carraeciana hypothesi circa proportionem qua gravia decidentia accelerantur, non recte inferri a Gassendo, motum fore in instanti.* Toulouse 1658 (6 Seiten).

*De cycloide Galilei et Torricellii propositiones viginti.* Ohne Ort und Jahr (einige Seiten).

*Propositio 36ª excerpta ex quarto libro de cycloide Antonii Laloverae nondum quidem edito, viris tamen doctrina et fide insignibus ante aliquot menses communicato.* Toulouse 1659 (5 Seiten).

In der *Quadratura circuli* verweist Lalouvère auf zwei weitere Schriften:

*Tractatus de principiis librae* (Quadr. circ. S. 137, Zeile 6 von oben).

*De communi sectioni plani et turbinatae superficiei ex puncto quiescente a linea recta per ellipsim, parabolam et sectiones oppositas circumducta descriptae* (Quadr. circ. S. 528, Zeile 16—13 von unten).

Auch wissen wir von einem handschriftlichen Nachlaß unbekannten Ortes, zu dem ein *Opusculum de materia probabili* gehört[6].

Briefe von Lalouvère findet man in der *Revue des questions scientifiques V*, Bruxelles 1879, S. 693—98; erwähnt seien ferner: *7 lettres au D. Petau*[7] (1631—44), Paris, Bibliothèque St. Geneviève (21 Seiten), sowie Briefe von Petau an Lalouvère in: *Petavii Orationes* (*Epistularum libri tres*), Paris 1652—53.

Lalouvère war zu Lebzeiten sehr bekannt und stand in hohem Ansehen. Der beste Beweis hierfür ist in den vielen Erwähnungen zu erblicken, die er seitens zeitgenössischer Mathematiker erfährt[8].

So stehen wir vor der eigenartigen Tatsache, daß ein von seinen Zeitgenossen durchaus geschätzter Mathematiker im Laufe der Entwicklung fast in Vergessenheit geriet; denn abgesehen von dem enzyklopädischen Werk Cantors[1] und der Spezialgeschichte Zeuthens[1] wird Lalouvère von den heutigen Mathematikhistorikern kaum mehr erwähnt, und auch in den beiden genannten Geschichtswerken wird vorwiegend der Zykloidenstreit besprochen.

Im folgenden soll an Hand der *Quadratura circuli* nachgewiesen werden, daß es sich lohnt, Lalouvère der Vergessenheit zu entreißen; denn er gehört unter die Vorläufer der Integralrechnung in eine Reihe mit *Cavalieri, Fermat, Gregorius a S. Vincentio, Guldin, Kepler, Torricelli* und *Valerio.* —

---

[6] *The James Gregory tercentenary memorial volume*, ed. H. W. Turnbull. London 1939, S. 225. Collins schreibt am 14. (24.) März 1671/2 an J. Gregory, daß Lalouvères Nachlaß enthält:

*Explicatio vocum geometricarum.*
*Quattuor libri problematum illustrium.*
*Duo libri problematum physico-mathematicorum.*
*A recueil de lettres to many eminent geometers containing solutions of many most difficult problems.*

[7] Dénis Petau S. J. (= Dionysius Petavius), Professor der Philologie in Paris (nach Poggendorff[5], Band II. Leipzig 1863, Sp. 412).

[8] Zum Beispiel bei St. Rigaud: *Correspondence of scientific men of the 17th century.* Oxford 1841. I S. 163, 177; II S. 42, 305—06, 498, 499, 501, 529, 533. G. W. Leibniz: *Mathematische Schriften*, her. v. C. I. Gerhardt. Halle/S. 1849—63. V S. 117; VI S. 397.

Die *Quadratura circuli*[9] führt den vollständigen Titel: *Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis, una cum inventione proportionis et centri gravitatis in portionibus sphaerae plurimorumque periphericorum, nec non tetragonismo absoluto certae cuiusdam cylindri partis et aliorum; demonstrata atque ad calculum reducta adiumento librae Archimedeae et a materia divulsae, quam praesenti opere restaurat atque amplificat Antonius Lalovera Societatis Jesu.* Das Werk ist 1651 in Toulouse bei Petrus Bosc erschienen. Auf dem Titelblatt befindet sich eine allegorische Zeichnung, die eine im Firmament hängende Waage darstellt, auf deren einer Schale die Erdkugel, der anderen ein Würfel liegt; darunter der Satz: *Si recte penditur orbis tessera fit lususque.* Umrandet ist die Zeichnung von dem diesem Paragraphen als Motto vorangestellten Spruch (S. 1).

Das Werk ist in Oktav gebunden und enthält zunächst ohne Paginierung eine Widmung an Ludwig XIV. (6 Seiten), das Vorwort *Ad lectorem* (5 Seiten) und die Freigabevermerke (1 Seite). Dann folgen *Prolegomena ad circuli tetragonismum* (74 Seiten) und *Admonitio in sequentes libros* (6 Seiten). Nun erst beginnt der eigentliche Text, noch einmal von Seite 1 an gezählt, in fünf Büchern (614 Seiten). Den Abschluß bilden eine *Appendix* (S. 615—24) und die *Appendix secunda* (15 Seiten ohne Paginierung). Das Buch ist, wie damals üblich, in lateinischer Sprache geschrieben; griechische Zitate (zum Beispiel aus Archimedes' Schriften) sind meistens anschließend ins Lateinische übertragen. Das Werk ist literarisch vorzüglich durchgearbeitet: im Text und vor allem auf dem Rande befinden sich zahlreiche Verweise auf frühere Stellen des Werkes und auf andere Autoren; unter diesen finden wir, was für den Gesamtcharakter des Werkes wichtig ist und deshalb schon hier angemerkt sei, vor allem *Euklid, Archimedes, Apollonios* und ihre Kommentatoren *Clavius* und *Commandino.* Die Typen der Beweise sind kleiner als die der Sätze selbst gewählt. Die Figuren sind sorgfältig ausgeführt, allerdings häufig räumlich verzeichnet; offenbar sind sie später eingerückt, was man auch daran erkennt, daß in verschiedenen Exemplaren des Werks die gleichen Figuren einmal richtig und einmal auf dem Kopf stehen[10]. Lalouvère verwendet auch für Punkte kleine (lateinische oder griechische) Buchstaben.

## § 2. Die Vor- und Nachworte.

I. *Ludovico XIV., regi Christianissimo.* Ihm widmet Lalouvère das Werk einmal als dem Förderer der Societas Jesu; zweitens als dem Freund der Wissenschaften; drittens schließlich als dem Repräsentanten der Gerechtigkeit, die durch die Waage symbolisiert wird, und diese spielt auch im vorliegenden Werke eine wichtige Rolle. Die Widmung stammt aus dem Dezember 1650.

II. Das Vorwort *Ad lectorem* beginnt mit einem Hinweis auf die in der Appendix enthaltenen Zusätze und Berichtigungen; sie sollen vor der Lektüre des Werkes durchgesehen werden. Einige auch bei Alegambe erwähnte Werke hat Lalouvère benutzt[11]. Das *Opus geometricum* des Gregorius a S. Vincentio[12] lernte Lalouvère nach seiner Aus-

---

[9] Zum Untertitel *Elementa tetragonismica* vergleiche *Quadratura circuli,* S. 618, Zeile 6—1 von unten

[10] Zum Beispiel gilt das von der Figur auf S. 431 in einem Exemplar aus dem Jesuiten-Colleg in Breslau (jetzt Eigentum der Preußischen Staatsbiliothek in Berlin, Signatur Oa 4785).

[11] J. Ch. de la Faille: *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis.* Antwerpen 1632.— P. Guldin: *De centro gravitatis* (= Centrobaryca). Wien 1635—41. — Gregorius a S. Vincentio: *Theoremata mathematica scientiae staticae.* Löwen 1624. — Siehe Ph. Alegambe: *Bibliotheca scriptorum Societatis Jesu.* Antwerpen 1643. (Über Alegambe siehe zum Beispiel Ch. G. Jöcher: *Allgemeines Gelehrten-Lexicon,* Teil I. Leipzig 1750, Sp. 245.)

[12] Gregorius a S. Vincentio: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni.* Antwerpen 1647.

sage erst sechs Monate vor Herausgabe seines Werkes kennen; er stellt fest, daß Gregorius keinen Gebrauch von der Waage macht. Die Kubatur des *primus cuneus notus*[13], die Lalouvère rasch (IV 25—26)[14] gelingt, erfolgt als *ungula* seitens des Gregorius ohne Waage in viel langwierigerer Weise[15]. Beachtlich ist, daß Lalouvère die verunglückte Kreisquadratur des Gregorius[16], ohne sie im einzelnen nachgeprüft zu haben, allein deswegen für nicht völlig gelöst hält, weil kein Zahlenverhältnis der Quadratseite zum Kreisdurchmesser gegeben wird, wogegen Lalouvère nur quantitative und mit Archimedes[17] vergleichbare Kreisquadraturen für ausreichend hält[18].

Lalouvère betont ausdrücklich die Übereinstimmung von Titel und Inhalt seines Werkes. Die Quadratur der Kreis- und Hyperbelsegmente erfolgt in Buch III mit Hilfe der *libra plana*, quantitative Auswertung in V 2 und V 3. Besonders macht Lalouvère noch auf die in V 13 gegebene Kubatur eines *Dicylindraceus* aufmerksam, sowie auf die Proportionen an Konoiden und Sphäroiden, die auf anderem Wege als bei Archimedes[19] ermittelt werden. Schließlich weist Lalouvère darauf hin, daß alle nicht ausdrücklich als Entlehnungen gekennzeichneten Ergebnisse von ihm selbst stammen.

III. Der Freigabevermerk des Tolosaner Ordensprovinzials für den Verfasser stammt vom 7. Mai 1648, für den Verleger vom 17. November 1650. Letzterer erfolgt auf Grund der königlichen Privilegien Heinrichs III. vom 10. Mai 1583, Heinrichs IV. vom 20. Dezember 1606 und Ludwigs XIII. vom 14. Februar 1611.

IV. Die *Admonitio in sequentes libros* macht den Leser mit der vorausgesetzten Literatur bekannt: Euklids *Elemente*[20], wenigstens Buch I bis VI; Apollonios' *Conica*[21]; von Archimedes *De aequiponderantibus*[22], Buch I, und *Quadratura parabolae*[23]. (Lalouvère benutzte aller Wahrscheinlichkeit nach Ausgaben von Clavius und Commandino.)

Dann nimmt Lalouvère noch Gelegenheit, den Tolosanern zu erklären, wie er als Theologe zu mathematischen Veröffentlichungen komme: Er sei erstens in Toulouse Mathematiker gewesen, ehe er Theologe wurde. Zweitens sei die Mathematik für die Theologie von hohem Werte, wobei Lalouvère besonders an die *Chronologia sacra* denkt und auch ein geschichtliches Beispiel anführt. Im übrigen habe er mit der Herausgabe des bereits 1648 fertiggestellten Werkes gezögert, um noch eventuellen Irrtümern auf die Spur zu kommen.

V. Die *Appendix* enthält nur Zusätze und Berichtigungen zu den Prolegomena und den fünf Büchern des Werkes. Wichtig dagegen ist die *Appendix secunda*, auf die ich im § 9 nochmals zurückkomme. In ihr erwähnt Lalouvère zunächst, er sei nach

---

[13] Ein Verzeichnis der Fachausdrücke findet man am Schluß dieser Abhandlung.

[14] Diese Schreibweise bedeutet: Lalouvère, *Quadratura circuli*, Buch IV, Satz 25—26, wie sich überhaupt Verweisungen ohne Verfasser und Titel stets auf die *Quadratura circuli* des Lalouvère beziehen.

[15] J. E. Hofmann: *Das Opus geometricum des Gregorius a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz* (Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1941, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Nr. 13), S. 44ff.

[16] J. E. Hofmann: a. a. O. [15], S. 69—72.

[17] *Dimensio circuli* (= *Archimedis opera omnia* ed. J. L. Heiberg, I[1], S. 257—71. Leipzig 1880).

[18] *Ad lectorem*, S. 3, Zeile 7—12 von oben.

[19] *De conoidibus et sphaeroidibus* (= Archimedis opera omnia ed. J. L. Heiberg I[1], S. 273—499. Leipzig 1880).

[20] Euklid: *Opera omnia* ed. J. L. Heiberg et H. Menge, Band I—V. Leipzig 1883—96.

[21] *Apollonii Pergaei quae graece exstant* ed. J. L. Heiberg, 2 Bände. Leipzig 1891, 1893.

[22] *Archimedis opera omnia* ed. J. L. Heiberg, II[1], S. 141—239. Leipzig 1881.

[23] *Archimedis opera omnia* ed. J. L. Heiberg, II[1], S. 293—353. Leipzig 1881.

Herausgabe des Buches (die Appendix secunda ist demnach vermutlich später angefügt und deswegen auch nicht paginiert?) darauf hingewiesen worden, daß zwar nicht seine Methode, wohl aber seine Ergebnisse bereits von anderen Zeitgenossen gefunden seien, und zwar von Luca Valerio[24], Bonaventura Cavalieri[25] und Evangelista Torricelli[26]. Gegenüber Valerio und, soweit ihm bekannt, anderen Mathematikern betont Lalouvère, daß er als erster das zweischalige Drehhyperboloid nach einem gegebenen Verhältnis geteilt (IV 15 Kor. 3) und Rauminhalt und Schwerpunkt eines einschaligen Drehhyperboloids berechnet habe (IV 23 Kor. 3, IV 27 Schol., V 3 Schol. alt.).

Die Auseinandersetzung mit Torricelli betrifft die Verwendung der Waage zur Ermittlung von Kreis-, Ellipsen- und Hyperbelsegmenten.

Von den Regeln des Cavalieri, die dieser zuerst 1635 veröffentlichte[27], sei die erste nur bedingt anwendbar. Beide Regeln seien von Guldin angegriffen und darauf von Cavalieri 1647 erneut dargestellt worden[25]. Lalouvère behauptet (und das ist durchaus glaubhaft), die zweite Regel, die als „Cavalierisches Prinzip" in die Schulmathematik eingegangen ist, schon vor Kenntnisnahme der Schriften Cavalieris und Torricellis verwendet zu haben (IV 11).

## § 3. Die Prolegomena ad circuli tetragonismum.

Im § I dieser längeren Einleitung erklärt Lalouvère im Anschluß an Archimedes, daß man unter der Quadratur einer krummlinig begrenzten Fläche die Aufgabe versteht, eine geradlinig begrenzte Fläche von gleichem Inhalt zu finden. Archimedes habe diese Aufgabe für die Parabel gelöst[23], und er selbst wolle auf dem gleichen Wege die Kreisquadratur durchführen. Es verdient also angemerkt zu werden, daß Lalouvère die Archimedische Kreis*messung*[17] nicht als Quadratur ansieht.

Der § II handelt von der Möglichkeit der Kreisquadratur überhaupt. Es wird das indirekte Beweisverfahren (*reductio ad impossibile*) diskutiert und die Vergleichbarkeit gleichartiger und ungleichartiger Größen; auch die Unvergleichbarkeit von geradlinigen und Kontingenzwinkeln wird betont. (Ähnliche Gesichtspunkte bei B. Souvey (Soverus), *Curvi et recti proportio*, Padua 1630, Buch VI, S. 361—67.)

Im § III erörtert Lalouvère die mathematische und mechanische Methode in der Geometrie. Er unterscheidet zunächst das Theorem (*nuda veritatis contemplatio*) vom Problem (*quod aliquid faciendum proponat*). Ein Problem kann nur durch *constructio* gelöst werden. Die mathematische Methode bedient sich lediglich des Zeichnens von Geraden und Kreisen und benutzt dazu Lineal und Zirkel, wogegen die mechanische Methode auch andere Instrumente heranzieht. Die erste Methode ist die von Platon bevorzugte; ein nur auf mechanischem Wege lösbares Problem nennt Plutarch in seiner *Vita Marcelli* ἄλογος (= irrational)[28], weil sich dabei keine Zahlenwerte ergeben, die als

---

[24] L. Valerio: *De centro gravitatis solidorum.* Rom 1604.

[25] B. Cavalieri: *Exercitationes geometricae sex.* Bologna 1647.

[26] E. Torricelli: *Opera geometrica.* Florenz 1644 (= *Opere* ed G. Loria e G. Vassura, 4 Bände. Faenza 1919—44).

[27] B. Cavalieri: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.* Bologna 1635; zweite (verbesserte) Auflage, Bologna 1653.

[28] Die Unterscheidung algebraischer und transzendenter Irrationalitäten wird erst später formuliert; vergleiche R. Descartes, *Oeuvres complètes* éd. Ch. Adam et P. Tannery, Band VI, Paris 1903, S. 390, und auch G. W. Leibniz: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum.* Acta eruditorum, Leipzig 1696, S. 294.

Verhältnisse ganzer (rationaler) Zahlen angesehen werden können. Lalouvère weist auf bekannte Probleme (Einschieben zweier mittlerer Proportionalen = Delisches Problem, Dreiteilung des Winkels) hin, die sich zwar zeichnerisch nur „mechanisch" lösen lassen, aber außerdem rechnerisch (Sehnentafeln des Ptolemaios) gelöst werden könnten, was für die Anwendungen (Architektur, Physik) wichtig sei. Im übrigen erwähnt Lalouvère noch die bei Clavius[29] wiedergegebenen Verfahren der Konchoide und Quadratrix des Nikomedes und die Lösung des delischen Problems durch Menaichmos.

Im § IV erläutert Lalouvère die Behauptung des Archimedes, er habe die Parabelquadratur zunächst mechanisch, dann geometrisch vorgenommen[23]. Wenn Archimedes den Flächeninhalt der Parabel auf den eines Dreiecks zurückführt, das sich doch zweifelsfrei mit Zirkel und Lineal konstruieren lasse, so könne man fragen, was denn an dem Verfahren mechanisch sei. Lalouvère antwortet: die Herleitung in den ersten siebzehn Sätzen, die unter Zuhilfenahme der Waage erfolgt.

Im § V gibt Lalouvère einen Querschnitt durch die Entwicklung der Kreisquadratur und der anderen beiden klassischen Probleme der griechischen Mathematik, ohne daß Neues dabei zutage tritt.

Drei „Quadratoren" des Altertums, nämlich Bryson, Antiphon und Hippokrates, widmet Lalouvère einen eigenen § VI. Der sachliche Inhalt ist bekannt[30]. Interessant ist Lalouvères eigene abschließende Stellungnahme zu diesen Versuchen: Er unterscheidet bei der Kreisquadratur erstens, ob sie möglich ist, zweitens, ob sie sich des Lineals und Zirkels oder anderer Instrumente bedient. Die erste Lösung wäre theoretisch, die andere konstruktiv (vergleiche § III). Die Möndchen-Quadratur des Hippokrates ist von Wichtigkeit, nur läßt sie sich nicht auf den Kreis selbst oder seine Segmente ausdehnen. Antiphon und Bryson arbeiten nach Lalouvère mit sophistischen Spekulationen (ἐριστικώς).

Den § VII widmet Lalouvère dem Quadraturversuch des sonst unbekannten Olivarius de Serres (*Le Théâtre d'Agriculture et Mesnage des Champs*, Paris 1600, I 3), vermutlich deshalb, weil dieser die Waage benutzt. In Serres' recht primitivem Verfahren wird der Kreisinhalt gleich dem Quadrat über der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecks gesetzt; schneidet man beide Figuren aus homogenem Material aus und hängt sie an eine (materielle!) Waage, so könne auf solche Weise die Gleichheit festgestellt werden, wobei ein eventueller geringfügiger Gewichtsunterschied unerheblich sei. Lalouvère dagegen fordert und verwendet natürlich nach Archimedischem Vorbild eine immaterielle (*a materia divulsa et abstracta*) Waage.

Im § VIII, dem letzten der Prolegomena, sucht Lalouvère die Gründe aufzuweisen, die die Kreisquadratur so sehr erschweren, und findet sie darin, daß sich zwischen Ausgangspunkt und Ziel, die an sich beide klar und einfach seien, so viele Hindernisse schöben, daß große Schwierigkeiten entstünden. Lalouvère bezeichnet in diesem Zusammenhange folgende Prinzipien als grundlegend:

1. Größen, die sich zur Deckung bringen lassen, sind einander gleich. Da nun ein Kreis niemals mit einer geradlinig begrenzten Figur zur Deckung zu bringen ist, kann man auf der Grundlage der elementaren Kongruenzgeometrie allein die Kreisquadratur nicht lösen. Deshalb

---

[29] Ch. Clavius: *Geometria practica*. Rom 1604; VI 15, VII Appendix, VIII 25.

[30] Vergleiche zum Beispiel J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik*, Bd. IV³. Berlin 1940, S. 263ff.

2. Das sogenannte Axiom des Eudoxos[31]. Unter seiner Zuhilfenahme erscheint die Kreisquadratur grundsätzlich möglich, aber so *abstrusa*, daß die mechanische Methode der Archimedischen Parabelquadratur[23] den Vorzug verdiene.

3. Hippokrates verwendet das rein mathematische Prinzip, daß eine Größe sich nicht ändert, wenn man einen Teil fortnimmt und einen gleich großen Teil hinzufügt. Aber ihm gelingt nur die Quadratur von *lunulae*, nicht die von *segmenta circuli*.

4. Mechanisches Prinzip: Größen sind gleich, wenn sie, an einer Waage in gleichen Abständen vom Drehpunkt aufgehängt, im Gleichgewicht sind. Mit Hilfe dieses Prinzips kann man gerad- und krummlinige Flächen vergleichen. Archimedes hat mit seiner Hilfe erfolgreich die Parabel quadriert[23]; deshalb will Lalouvère den gleichen Weg auf Kreis und Hyperbel übertragen.

## § 4. Buch I.

Das Buch trägt rein geometrischen Charakter, benutzt also keine mechanischen Vorstellungen. Es handelt von gerad- und krummlinig begrenzten Figuren, wozu noch „gemischtlinige" kommen, das sind solche, deren Seiten teils Geraden, teils Kurven sind. Lalouvère setzt stillschweigend voraus, daß die von ihm betrachteten „Kurven" überall mit stetiger Tangente ausgestattet und doppelpunktfrei sind, wie wir heute sagen würden. Man kann das Buch, das insgesamt sechsundzwanzig Sätze umfaßt, in drei Abschnitte einteilen, von denen der zweite mit Satz 13, der dritte mit Satz 20 beginnt. Der erste Abschnitt wird durch die Sätze 1 bis 4, der dritte durch 20 und 21 eingeleitet; Satz 26 ist ein Anhängsel.

Im Satz I 1 wird festgestellt, daß der Durchmesser des Tangentensehnendreiecks eines Kegelschnitts[32] durch diesen im Falle einer Parabel halbiert wird; bei der Hyperbel ist der an der Sehne gelegene Abschnitt des Durchmessers der größere, beim geschlossenen Kegelschnitt (*oxygonia*) der kleinere.

In I 2 steht, daß ein Kegelschnittsegment durch ein- und umbeschriebene Polygone beliebig approximiert werden kann. Lalouvère bemerkt, daß bezüglich der Approximation durch Sehnen Kreis[33] und Ellipse[34] bereits behandelt sind, so daß er noch Parabel und Hyperbel erledigt; sein Verfahren läuft auf eine Exhaustion durch fortschreitende Halbierung der Sehnen hinaus. Die Approximation durch Tangenten hat beim Kreis Archimedes[35] vorgenommen; Lalouvère erledigt Ellipse, Hyperbel und Parabel.

In I 3 vergleicht Lalouvère die Flächeninhalte einiger Vierecke (Rechteck, rechtwinkliges Trapez; Parallelogramm, beliebiges Trapez), und zwar erstens für den Fall, daß zwei entsprechende Vierecke gleiche Winkel zwischen verhältnisgleichen Seiten haben, also ähnlich sind, zweitens aber auch für den allgemeineren Fall, daß die Winkel verschieden sind. Im Korollar wird gefolgert, daß sich die Flächeninhalte der betrachteten Vierecke bei gleichen Grundseiten wie die zugehörigen Höhen verhalten.

---

[31] Euklid[20]: *Elemente* X 1 (fußend auf V Definition 4; angewendet in XII): Wenn man von der größeren zweier verschiedener Größen mehr als die Hälfte fortnimmt, vom Rest wieder mehr als die Hälfte usw., so wird schließlich die kleinere gegebene Größe untertroffen.

[32] Kegelschnitte werden stets reell und nicht zerfallend angenommen; häufig meint Lalouvère nur Stücke eines Kegelschnittbogens.

[33] Euklid[20]: *Elemente* XII 2.

[34] F. Commandino: *Archimedis opera nonnulla in latinum conversa et commentariis illustrata.* Venedig 1558 (De conoidibus et sphaeroidibus 5).

[35] *De sphaera et cylindro* I 6 (= *Archimedis opera omnia* ed. J. L. Heiberg, I[1], S. 1—255. Leipzig 1880).

In I 4 steht: Werden zwei Parallelen so durch drei Geraden geschnitten, daß die Abschnitte auf der einen Parallelen zu denen auf der anderen verhältnisgleich sind, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

Interessant und auch für I 7 und I 9 grundlegend ist nun der Satz I 5: Es mögen die vom Punkte $A$ (Abb. 1) der Geraden $AK$ ausgehenden Kurven $AL$ und $ANM$ mit den Ordinaten $y_1$ und $y_2$ so beschaffen sein, daß alle zwischen $AK$ und $AM$ gelegenen Parallelen zu $KM$ durch $AL$ im selben Verhältnis, nämlich wie $KL$ zu $LM$, geteilt werden (so daß also $y_2 = ky_1$ ist). Ferner berühre die Gerade $t_1 = OC$ die Kurve $AL$ in $C$, und es werde durch den beliebigen Punkt $F$ auf $AL$ die Parallele $EFG$ zu $KM$ gelegt, die $OC$ in $I$ schneidet. Man bestimme $H$ durch die Proportion

$$EF : EI = EG : EH.$$

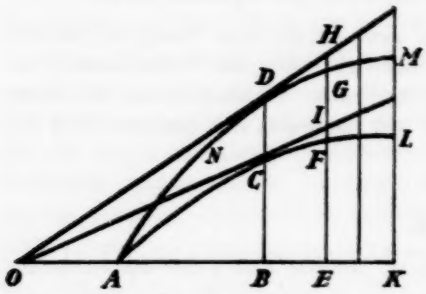

Abb. 1 (Quadr. circ. S. 24).

Dann berührt $t_2 = OH$ die Kurve $NM$, und zwar in einem Punkte $D$, so daß $CD$ parallel zu $KM$ ist.

In I 7 verallgemeinert Lalouvère diesen Satz insofern, als die Punkte $L$ und $M$ nicht mehr derselben Geraden angehören, sondern $KL$ und $KM$ (und die jeweils zugehörigen Parallelen) einen (spitzen) Winkel miteinander bilden. Die Behauptung ist entsprechend dieselbe wie in I 5.

Die Verallgemeinerung in I 9 besteht darin, daß der Kurve $NM$ eine eigene „Achse"[36] zugeteilt ist, die nicht zu $AK$ parallel ist; dagegen liegen $K$, $L$, $M$ (wie in I 5) auf derselben Geraden. Und wieder wird behauptet, daß unter den den veränderten Bedingungen dieses Satzes angepaßten Voraussetzungen die Berührungspunkte zweier entsprechender Tangenten an die Kurven $AL$ und $NM$ auf derselben Parallelen zu $KM$ liegen.

Man kann also sagen, daß I 5 in doppelter Weise verallgemeinert wird: einmal bezüglich der „erzeugenden Parallelen" (I 7) und das andere Mal hinsichtlich der „Achse"(I 9).

In I 6 legt Lalouvère dar, daß sich die Flächeninhalte unterhalb affiner Kurven wie die entsprechenden Ordinaten[37] verhalten: Von den Endpunkten der Geraden $AB$ (Abb. 2) mögen zwei parallele Geraden $AI$ und $BD$ ausgehen, deren Endpunkte durch eine Kurve $ID$ verbunden seien; ferner werde (entsprechend I 5) eine Kurve $HC$, zum Beispiel ein Kegelschnitt, so gezeichnet, daß sie alle Parallelen zu $BD$ im Verhältnis $BD$ zu $BC$ teilt. Dann verhält sich der Flächeninhalt des (gemischtlinigen) Vierecks $ABDI$ zu dem von $ABCH$ wie $BD$ zu $BC$:

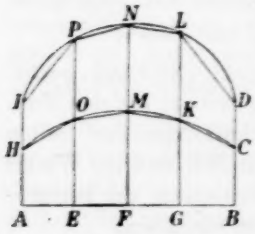

Abb. 2 (Quadr. circ. S. 27).

$$\int_0^x y_2 dx : \int_0^x y_1 dx = y_2 : y_1 = k.$$

Der Beweis wird apagogisch geführt, indem Lalouvère zeigt, daß aus

$$BD : BC = ABDI : q^2 \tag{1}$$

[36] In I 5 ist ja, modern gesprochen, $AK$ Affinitätsachee für die zueinander affinen Kurven $AL$ und $ANM$.

[37] Wenn auch bei Lalouvère von Koordinaten im cartesischen Sinne keine Rede ist (ob in Unkenntnis oder weil Lalouvère glaubte, mit seiner Methode der Koordinaten entraten zu können, sei dahingestellt), werde doch eine *ordinatim applicata* als „Ordinate" bezeichnet.

gefolgert werden kann, daß $q^2$ weder kleiner noch größer als $ABCH$ ist. Ferner werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem die Gerade $AB$ auf der hohlen (wie in Abb. 2) oder auf der erhabenen Seite der Kurven liegt; im letzten Falle treten Tangenten an die Stelle von Sehnen.

Das Typische des Beweisganges werde etwa für den Fall der Abbildung 2 wiedergegeben, und zwar möge die Annahme

$$q^2 < ABCH$$

widerlegt werden: Setzt man

$$ABCH - q^2 = r^2, \tag{2}$$

so kann gemäß I 2 die Summe der Segmente $HO$, $OM$, $MK$, $KC$ kleiner als $r^2$ gemacht werden. Aus I 3 folgert man, daß die Inhalte der „großen" Trapeze $AEPI$, $EFNP$, ... sich zu denen der „kleinen" Trapeze $AEOH$, $EFMO$, ... wie $BD$ zu $BC$ verhalten, und dasselbe ergibt sich für $ABDLNPI$ und $ABCKMOH$ als die Summen dieser Trapeze. Wenn wir den Inhalt des geradlinigen Vielecks $ABDLNPI$ mit $t$ abkürzen, den des geradlinigen Vielecks $ABCKMOH$ mit $u$, den des gemischtlinigen Vierecks $ABDI$ mit $v$ und den des gemischtlinigen Vierecks $ABCH$ mit $w$, so können wir sagen: Es ist

$$BD : BC = t : u.$$

Nun war aber

$$BD : BC = v : q^2, \tag{1}$$

also folgt

$$t : u = v : q^2,$$

das heißt

$$v : t = q^2 : u.$$

Da jedoch $v > t$ ist, ergibt sich $q^2 > u$. Andererseits war

$$w - q^2 = r^2, \tag{2}$$

das heißt

$$w - r^2 = q^2.$$

Da die Summe der Segmente $HO$, $OM$, $MK$, $KC$, mithin $w - u$, unter $r^2$ herabgedrückt werden kann, wird

$$w - (w - u) > q^2,$$

das heißt

$$u > q^2,$$

wodurch der Widerspruch herbeigeführt und die Annahme $q^2 < w$ ad absurdum geführt ist.

Hinzugefügt sei noch, daß für den Fall, daß der Geraden $AB$ die erhabene Seite der Kurve $HC$ zugekehrt ist und Tangenten an die Stelle der Sehnen treten, auch die Sätze I 4 und I 5 zum Beweise benötigt werden.

In den Korollaren steht, daß die äußeren Trapeze durch Dreiecke ersetzt werden dürfen (Kor. 1); daß die Grundseiten der Trapeze nicht gleich zu sein brauchen (Kor. 2); daß Kegelschnittsegmente durch ihre Durchmesser halbiert werden (Kor. 3); daß auch $AB$ ein Kegelschnitt sein kann (Kor. 4).

Im Scholium zu I 6 erfahren wir schließlich, wann eine Kurve als einem Kegelschnitt gleichwertig angesehen werden kann, wobei als wesentliche Eigenschaft die Approximationsfähigkeit gemäß I 2 gefordert wird.

In I 8 und I 10 verallgemeinert Lalouvère I 6 in derselben Richtung, in der die Weiterführung von I 5 in I 7 und I 9 erfolgte:

In I 8 werden also die Strecken $BC$ und $BD$ nicht auf derselben Geraden liegend angenommen, sondern bilden einen spitzen Winkel miteinander. Die Flächeninhalte verhalten sich dann wie die von $D$ und $C$ auf $AB$ gefällten Lote. — In einem Scholium wird noch eine Dehnung in Richtung der „Achse" $AB$ vorgenommen, das heißt zu den Kurven $HC$ und $ID$ gehören verschieden lange Grundseiten.

In I 10 erhält die Kurve $ID$ eine eigene „Achse" $SY$, wobei $S$ und $Y$ auf $AI$ beziehungsweise $BD$ liegen, $SY$ jedoch anders gerichtet ist als $AB$. Es wird gezeigt, daß sich die Flächeninhalte der gemischtlinigen Vierecke $SYDI$ und $ABCH$ wie $SI$ zu $AH$ verhalten.

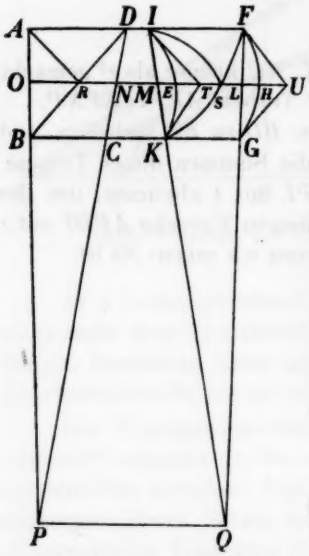

Abb. 3 (Quadr. circ. S. 60).

In I 12 zeigt Lalouvère nun noch, daß die Gerade $SY$ durch einen Kegelschnitt ersetzt werden kann.

In I 11 handelt es sich um zwei Vierecke $BCDA$ und $KGHFIE$, von denen das erste gerad-, das zweite gemischtlinig ist, wobei etwa $IEK$ ein Kegelschnitt sei (Abb. 3). Während die Seiten $AD$ und $BC$ beziehungsweise $IF$ und $KG$ parallele Geraden sind, können die anderen Seitenpaare auch verschieden gerichtet sein, so daß die Vierecke im allgemeinen Trapeze sind (siehe Abbildung). Wenn nun für jede Parallele zu $AF$, zum Beispiel für $OH$,

$$ON:EH = AD:IF$$

gilt, verhalten sich auch die Flächeninhalte der Trapeze wie $AD$ zu $IF$.

Den Beweis führt Lalouvère so, daß er das gemischtlinige Trapez $KGHFIE$ durch das geradlinige $KGLFIM = KGFI$ ersetzt; dann gilt auf Grund des Korollars von I 3 (S. 7):

$$BCDA:KGFI = AD:IF.$$

Jetzt braucht nur die Gleichheit von $KGHFIE$ und $KGFI$ gezeigt zu werden. Das geschieht so, daß Lalouvère dartut, daß für jede Parallele zu $AF$ die Abschnitte zwischen den Kurven $IEK$ und $FHG$ gleich denen zwischen den Geraden $IMK$ und $FLG$ sind; für $OH$ wird also zum Beispiel $EH = ML$.

Der Beweisgang ist sowohl unabhängig davon, auf welcher Seite der Kurve $IEK$ die Gerade $IK$ liegt (Kor. 1), als auch davon, ob man die Vierecke durch die Dreiecke $BDA$ und $KFIE$ ersetzt (Kor. 2). — Korollar 3: Zeichnet man über $AB$ das Dreieck $BRA$ und dazu das krummlinige Dreieck $KSIE$, so daß sich die innerhalb dieser beiden Dreiecke gelegenen Abschnitte aller Parallelen zu $OS$ wie $OR$ zu $ES$ verhalten, so wird, je nach dem Verhältnis $AB:OR$, das krummlinige Dreieck $KSIE$ einer *lunula* immer ähnlicher. Lalouvère gelangt so im Grenzfalle zur Quadratur eines von beliebigen Kurven begrenzten Möndchens und damit weit über Hippokrates hinaus, der ja nur gewisse Kreismöndchen quadriert[38]. Im Korollar 4 schließlich kann Lalouvère die in I 2 vorgenommene Approximation eines Kegelschnitts durch Sehnen und Tangenten auf Kurven

[38] H. Wieleitner - J. E. Hofmann: *Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde.* Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Neuen Realgymnasiums. München 1934.

schlechthin übertragen; denn während $IEK$ als Kegelschnitt vorausgesetzt war, braucht $FHG$ bloß eine „Kurve" zu sein. —

Der Satz I 13 handelt von der Approximation eines Kegelschnitts durch Treppenpolygone (Abb. 4). Er hat den Wortlaut[39]: *Datum sit spatium quod potest recta o, datum etiam sit sectionis conicae segmentum ACB comprehensum basi AB et arcu ACB, quem recta CE basi AB parallela tangat in C, aequidistantes autem diametro CD non secent sectionem ACB ad partes C, nisi in uno puncto; id enim fieri posse constat ex conicis. Dico arcum ACB dividi posse in tot portiones numero pares per rectas basi AB parallelas, quarum una sit CE, ut, postquam per C ducta fuerit diameter CD et per reliqua divisionum puncta aequidistantes ipsi CD, parallelogramma circa arcum consistentia sint simul minora spatio o.*

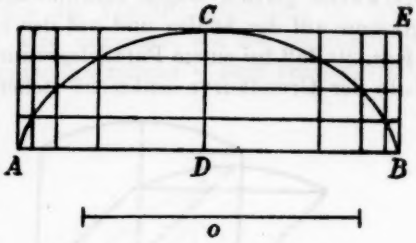

Abb. 4 (Entspr. Quadr. circ. S. 69).

Für die Approximation ist wesentlich, daß alle Parallelen zum Durchmesser $CD$ den Kegelschnitt in nur je einem Punkte schneiden. — Während im Korollar 1 die Ersetzbarkeit der von dem Kegelschnitt durchschnittenen Parallelogramme durch die (oberen oder unteren) gemischtlinigen Dreiecke betont wird, sagt Lalouvère im Korollar 2, daß an Stelle des Kegelschnitts auch zwei in $C$ zusammentreffende stückweise glatte Bögen, die nicht einmal Kegelschnitte zu sein brauchen, treten können, wofern nur durch jeden Punkt der Kurve nur je eine Parallele zu Sehne und Durchmesser des Segments gezogen werden kann.

Die nächsten drei Sätze (I 14—16) sind Weiterführungen von I 13, und zwar von folgender Art:

In I 14 sind $IBH$ und $KDL$ zwei Kegelschnitte, deren Durchmesser auf $DG$ liegen (Abb. 5). Es ist $IK = HL$, jedoch $IK < BD$, so daß die zwischen den Kegelschnitten gelegenen Abschnitte der Parallelen zu $IK$ um so größer sind, je näher sie an $BD$ liegen. Jede Parallele schneidet gemäß I 13 jeden Kegelschnitt in nur je einem Punkte. Gibt man dann jeweils eine Fläche $r^2 \lesseqgtr IBHLDK$ vor, so lassen sich gemischtlinige Parallelogramme finden, deren Summe $\gtreqless r^2$ ist. (In der dem oberen Zeichen entsprechenden Abbildung 5 wäre zum Beispiel

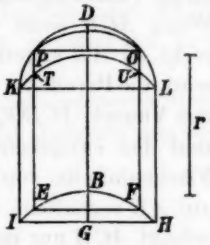

Abb. 5 (Entspr. Quadr. circ. S. 73).

$$IETK + EBQP + BFOQ + FHLU > r^2.$$

Der Beweis beruht im wesentlichen auf I 13, wobei für den Fall der unteren Zeichen in den Ungleichungen Tangenten an die Stelle von Sehnen treten.) — Wichtig ist die Bemerkung des Korollars, wonach $KDL$ kein Kegelschnitt zu sein braucht, sondern eine Kurve gemäß I 13 Korollar 2 sein kann.

In I 15 wird der bekannte Satz der Elementargeometrie, daß sich die Flächeninhalte (geradliniger) Parallelogramme mit gleichen Grundseiten wie die zugehörigen Höhen verhalten (wobei die Winkel im allgemeinen verschieden sein können), auf gemischtlinige Parallelogramme übertragen, und zwar sollen die Grundseiten Kegelschnitte sein und die geraden Seiten des einen Parallelogramms auf der Sehne des Grundkegel-

[39] Ich habe lediglich *u* und *v* und die Ligaturen im heutigen Sinne umgeschrieben und die kleinen Buchstaben, sofern sie Punkte bedeuten, durch große ersetzt.

schnitts senkrecht stehen (Abb. 6). Dabei wird noch gefordert, daß die geraden Seiten nebst sämtlichen Parallelen in den verglichenen Parallelogrammen erstens einander gleich sind, zweitens die Grundseite in nur je einem Punkte schneiden.

In den Korollaren steht, daß die Grundseiten auch gemäß I 13 Korollar 2 aus zwei stückweise glatten Bögen zusammengesetzt sein können (Kor. 1); daß die Parallelogramme auf der hohlen und auf der erhabenen Seite der „Grundkurve" liegen dürfen (Kor. 2); daß bei einem Parallelogramm, dessen gerade Seiten nicht auf der Sehne unterhalb der Grundkurve senkrecht stehen und das durch die durch den Mittelpunkt der

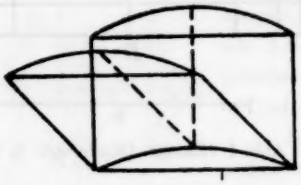

Abb. 6 (Entspr. Quadr. circ. S. 83).

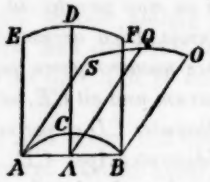


Abb. 7 (Entspr. Quadr. circ. S. 88).

Grundkurve gehende Parallele zu den geraden Seiten unterteilt wird, derjenige Teil den größeren Flächeninhalt aufweist, bei dem jene Parallele mit der Sehne einen spitzen Winkel einschließt (Kor. 3).

In I 16 wird der Satz I 15 insofern erweitert, als es sich nicht mehr um gemischtlinige Parallelogramme, sondern um gemischtlinige affine Vierecke handelt (Abb. 7): Wenn $ACB$ einen Kegelschnitt mit dem Durchmesser $C\Lambda$ darstellt, $AE = BF$ senkrecht an $AB$ angetragen werden und $EDF$ ein solcher Kegelschnitt ist, daß $CD < AE$ wird, die Parallelen zu $CD$ also umso größer sind, je näher sie bei $AE$ liegen; wenn ferner das Viereck $ACBOQS$ in $AS$, $\Lambda Q$[40], $BO$ und allen Parallelen zu ihnen mit $AE$, $\Lambda D$, $BF$ und den entsprechenden Parallelen aus $ACBFDE$ übereinstimmt, so sollen sich die Flächeninhalte von $ACBFDE$ und $ACBOQS$ wie die Lote von $E$ beziehungsweise $S$ auf $AB$ verhalten. (Auch hier darf jede Parallele zu $AE$ beziehungsweise $AS$ den Kegelschnitt $ACB$ nur in *einem* Punkte schneiden.) — Das Korollar 1 besagt, daß die Gerade $CD$ auch die längste aller ihrer Parallelen sein kann; die Korollare 2 und 3 entsprechen den Korollaren 1 und 2 von I 15.

Nun kommt die Satzgruppe I 17 bis 19[41], die von Zylinderhufen handelt. Der wichtigste dieser Sätze ist I 18; die hier entwickelten Zylinderhufe erinnern an die *ungula cylindrica* des Gregorius a. S. Vincentio[42]. Lalouvère entwickelt (Abb. 8) über einem gemischtlinigen Dreieck $AGB$ als Grundfläche drei Zylinderhufe $AGBD$, $AGBE$, $AGBF$. Dabei sind die Geraden $BE$ und $BF$ gleich, und $BD$ halbiert deren Winkel. Wenn dann $EO$ das von $E$ auf $BD$ gefällte Lot darstellt, besteht die Beziehung

$$\frac{AGBE + AGBF}{2\,AGBD} = \frac{BO}{BD}\,^{43}. \tag{3}$$

[40] Hier ist Lalouvère (oder vielmehr dem Zeichner) ein Irrtum unterlaufen, indem er die Parallele zu $AS$ durch $C$ statt durch $\Lambda$ zieht. Soll die Lalouvèresche Zeichnung bestehen bleiben, so bleibt nur übrig, den Satz räumlich zu deuten; dem widersprechen aber der Text und der Zusammenhang mit I 15. Also muß die Zeichnung in der genannten Weise berichtigt werden, damit I 16 als ebener Satz richtig bleibt.

[41] Diese Sätze sollen nach einem Vorschlag von Herrn J. E. Hofmann räumlich gedeutet werden; Lalouvères Figuren und Formulierungen sind nicht immer eindeutig.

[42] Vergleiche [12], a. a. O. IX 8, S. 961—62.

[43] Lalouvère gibt irrtümlich den Kehrwert dieses Verhältnisses, benutzt aber dann in I 19 den richtigen Wert.

(I 19: Ist außerdem $FB$ parallel $DE$, so hat die rechte Seite von (3) den Wert $\frac{1}{2}$, so daß

$$AGBE + AGBF = AGBD$$

folgt.)

Den Beweis von I 18 führt Lalouvère so, daß er das ganze Gebilde an der durch $AG$ gehenden, zu $BD$ parallelen Ebene spiegelt und nachweist, daß der zu $AGBE$ symmetrische Körper raumgleich $ABGF$ ist. Daß daraus die Verhältnisgleichung (3) folgt, wird unter Benutzung von I 17 erkannt. (Dort wird dargetan, wie die Rauminhalte von Zylinderhufen von der Seitenlänge der Bestimmungsdreiecke — zum Beispiel $GBD$ in Abbildung 8 — abhängen.) —

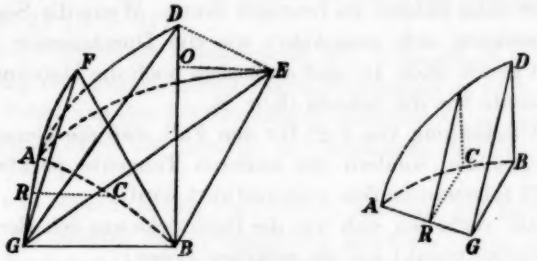


Abb. 8 (Entspr. Quadr. circ. S. 101).

Der letzte Abschnitt des Buches I beginnt mit zwei Sätzen, die der Proportionenlehre angehören:

In I 20 lehrt Lalouvère, daß ein Rechteck, das aus zwei Abschnitten eines Kreisdurchmessers gebildet wird, einen umso größeren Flächeninhalt hat, je näher der Teilpunkt dem Mittelpunkt liegt. Grenzfall: Quadrat.

I 21: Werden drei Strahlen durch den nämlichen Punkt von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Rechtecke aus den Parallelenabschnitten wie die Quadrate aus den ganzen Parallelen, und umgekehrt: Aus

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{p+q}{p'+q'}$$

folgt

$$\frac{pq}{p'q'} = \frac{(p+q)^2}{(p'+q')^2},$$

und umgekehrt.

In den Sätzen I 22 bis 24 handelt es sich um Proportionalitäten bei Kegelschnittsegmenten.

In I 22 sind zwei Kegelschnittsegmente $BEC$ und $GKH$ mit den Tangenten $BA$ und $CA$ beziehungsweise $GF$ und $HF$ gegeben, so daß $AD$ und $FI$ Durchmesser sind (Abb. 9). Für die Scheitel $E$ und $K$ gelte

$$AE : ED = FK : KI.$$

Dann folgt für jede Parallele zu den Berührungssehnen aus

$$AC : AO = FH : FR$$

stets

$$OL : RQ = LP : QS = BC : GH,$$

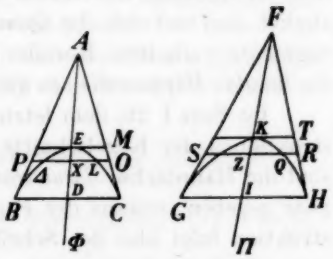


Abb. 9 (Quadr. circ. S. 112).

das heißt die Segmente sind affin (*similia quantum ad diametri divisionem*). Ist außerdem $AD = FI$, so sind die Segmente affin mit Erhaltung des Flächeninhalts (*aequalia et*

*similia quantum ad diametri divisionem*). Die Korollare besagen: Es verhält sich

$$XL:ZQ = BC:GH$$

(Kor. 1). Haben die Kegelschnitte Mittelpunkte ($\Phi$, $\Pi$), so sind die Segmente auch dann affin, wenn

$$\Phi D:\Phi E = \Pi I:\Pi K$$

ist (Kor. 2). Verhalten sich die Rechtecke aus den Berührungssehnen und den Loten von den Scheiteln auf sie wie die Quadrate der Berührungssehnen, so nennt Lalouvère die Segmente *similia quantum ad ipsius diametri ad basim proportionem et inclinationem* (Kor. 3); sie sind also dann ähnlich im heutigen Sinne. Wenn die Segmente ähnlich sind und die Berührungssehnen sich umgekehrt wie die Durchmesser verhalten, sind die Segmente überhaupt gleich (Kor. 4); sind außerdem noch die Durchmesser gleich, so verhalten sich die Segmente wie die Sehnen (Kor. 5).

I 23 ist eine Abwandlung von I 22 für den Fall, daß die Geraden durch $O$ und $R$ nicht der Berührungssehne, sondern der anderen Tangente parallel sind[44], während in I 24 der Satz I 23 folgendermaßen weitergeführt wird:

1. Die Segmente verhalten sich wie die Rechtecke aus den Berührungssehnen und den vom Tangentenschnittpunkt auf sie gefällten Loten;

2. genau so verhalten sich auch Teilsegmente, die dadurch entstehen, daß man die beiden Berührungssehnen im gleichen Verhältnis dreifach unterteilt und durch die Teilpunkte Parallelen zu einer Tangente zieht.

Wichtig ist Satz I 25, der die Quadratur eines Möndchens liefert, das nicht notwendig durch Kegelschnitte begrenzt wird. Gegeben sei (Abb. 10) die Kurve $ADB$ mit der Sehne $AB$ und die Kurve $FHEIG$, die durch die Strecken $AF$ und $BG$ mit $AB$ verbunden ist. Man verbinde die Punkte $A$, $D$, $B$ und $F$, $H$, $E$, $I$, $G$ geradlinig. Wenn dann die oberen Segmente die unteren nicht überdecken, die Strecken $AF$ und $BG$ mit dem Bogen $ADB$ nur die Punkte $A$ und $B$ gemeinsam haben und die Summe der Segmente $FH$, $HE$, $EI$, $IG$ gleich der von $AD$ und $DB$ ist, so ist das Möndchen $AFEGBD$ gleich dem Vieleck $AFHEIGBD$. Dabei ist die Summe der oberen Segmente gleich der der unteren, wenn sowohl die oberen als auch die unteren Segmente untereinander gleich sind und sich die Anzahl der oberen zu der der unteren verhält wie der Inhalt eines unteren Segments (zum Beispiel $AD$) zu dem eines oberen (zum Beispiel $FH$). — Korollar 1 gibt im Anschluß an I 22 Korollar 3 eine hinreichende Bedingung für die Gleichheit der Summen der oberen und unteren Segmente: wenn die Segmente $AD$ und $FH$ ähnlich sind und sich die Quadrate der Durchmesser umgekehrt wie die Anzahlen der Segmente verhalten. Korollar 2 enthält einen mit Hilfe von I 25 geführten Beweis für die *lunulae Hippocratis* am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.

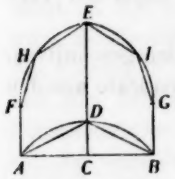

Abb. 10 (Entspr. Quadr. circ. S. 129).

Im Satz I 26, dem letzten des Buches, werden im Anschluß an Apollonios[45] Konstruktionen der Kegelschnitte gegeben. Für die Zeichnung von Ellipse und Hyperbel sind die Hauptachse (*latus transversum*) und ein spiegelbildlich zu ihr gelegenes Punktepaar gegeben, woraus der Parameter (*latus rectum*) ermittelt werden kann. Die Konstruktion folgt also der Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2.$$

[44] Vergleiche Archimedes[23]: *Quadratura parabolae* 4.

[45] Apollonios[21]; *Conica* I 20—21, 52—53.

Bei der Parabel sind entsprechend Scheitel und Parameter gegeben, und die Zeichnung erfolgt gemäß $y^2 = 2px$. —

Aus diesem Buche möchte ich zum Schluß folgendes als von besonderem mathematischen Interesse hervorheben:

1. Die Exhaustion von Kegelschnittsegmenten in I 2 (S. 7). Dadurch, daß eine feste Fläche $o$ vorgegeben wird, kommt Lalouvère (ähnlich wie Fermat) der „Epsilontik" der modernen Analysis nahe. Dasselbe gilt von den Treppenpolygonen des Satzes I 13 (S. 11).

2. Die Affinitätsbeziehungen an Kegelschnitt- und Kurvensegmenten in I 5, 7, 9 (S. 8) und I 6, 8, 10, 12 (S. 8—11).

3. Der Vergleich allgemeiner Zylinderhufe in I 17 bis 19 (S. 12—13).

4. Die Einteilung der geometrischen Verwandtschaften in affin und ähnlich einerseits, ohne und mit Erhaltung des Flächeninhalts andererseits, so daß zum Beispiel der Begriff der Deckungsgleichheit als „ähnlich mit Erhaltung des Flächeninhalts" anfällt (I 22, S. 13—14). —

Lalouvère führt in diesem Buche vor, wieviel sich mit der Methode der Alten erreichen läßt. Er ist ein Meister des apagogischen Beweises. Sein mitunter etwas einförmiges, aber wohl durchdachtes Verfahren einer echten Exhaustion steht, was mathematische Strenge anbelangt, in bemerkenswertem Gegensatz zu der Indivisibeln-Methode seiner Zeitgenossen.

Im ganzen trägt Buch I vorbereitenden Charakter. Es entwickelt die Eigenschaften derjenigen geometrischen Gebilde, auf die im folgenden Buche Schwerpunktsbetrachtungen angewendet werden sollen.

## § 5. Buch II.

Dieses Buch ist nur kurz. Dennoch bringt es in seinen achtzehn Sätzen jene Entwicklungen, die für Lalouvères Verfahren grundlegend sind[46]. Es handelt sich in diesem Buche um das in § VIII der Prolegomena (siehe S. 7) angekündigte Prinzip der Flächenvergleichung mit der Waage[47], wie es Archimedes in seinen Schriften *De aequiponderantibus*[22] und *Quadratura parabolae*[23] anwendet; die Verwandtschaft vieler Figuren des Buches II der *Quadratura circuli* mit denen des letztgenannten Archimedischen Werkes fällt sogleich auf (vergleiche zum Beispiel II 1 mit *Quadratura parabolae* 16).

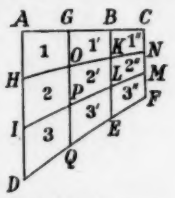

Abb. 11 (Entspr. Quadr. circ. S. 138).

In den ersten beiden Sätzen des Buches behandelt Lalouvère gemischtlinige Trapeze, die durch zueinander affine Kurvenscharen mit der Achse $AGBC$ begrenzt werden. In II 1 (Abb. 11) habe das Trapez $DFCA$ als krumme Seite $DF$. Während die Geraden $GQ$ und $BE$ parallel zu $AD$ und $CF$ verlaufen, mögen die Kurven $IM$ und $HN$ so gelegt sein, daß sie

erstens die Seite $AD$ und alle ihre Parallelen im selben Verhältnis schneiden;

[46] *Quadr. circ.* S. 620, *Appendix ad secundum librum*, wo auch eine Querverbindung zu IV 28 bis 30, V 2 und 3 hergestellt wird.

[47] Wenn es sich, wie bei Archimedes, so bei Lalouvère auch stets um eine „immaterielle" Waage (*libra a materia divulsa et abstracta*) handelt, mögen doch im Interesse eines knappen Ausdrucks die bekannten physikalischen Bezeichnungen gebraucht werden, wie sie beim Hebelgesetz üblich sind. Wir sprechen also von Drehpunkt, Kraft, Kraftarm, Last und Lastarm, und meinen mit der „Last" stets die zu ermittelnde Fläche (Körper), mit der „Kraft" die meist als Rechteck (Quader oder Spat) gegebene, der Last das Gleichgewicht haltende Größe.

zweitens folgende Proportionen zwischen den Abschnitten von $AD$ und den Trapezen $AO$ und so weiter bewirken:

$$\begin{aligned} AH:AI:AD &= \text{Trapez } AO:AP:AQ \\ &= \quad ,, \quad GK:GL:GE \\ &= \quad ,, \quad BN:BM:BF \\ &= \quad ,, \quad AN:AM:AF. \end{aligned}$$

Dann wird behauptet:

$$\begin{aligned} AH:HI:ID &= \text{Trapez } AO:HP:IQ \\ &= \quad ,, \quad GK:OL:PE \\ &= \quad ,, \quad BN:KM:LF \\ &= \quad ,, \quad AN:HM:IF; \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned} y_1:y_2:y_3 &= 1:2:3 \\ &= 1':2':3' \\ &= 1'':2'':3'' \\ &= (1+1'+1''):(2+2'+2''):(3+3'+3''). \end{aligned}$$

Diese Behauptung spezialisiert Lalouvère in II 2 folgendermaßen: Das gemischtlinige Trapez $CDBA$ (Abb. 12) wird von der Geraden $AB$, der Kurve $CD$ und den parallelen Geraden $AC$ und $BD$ begrenzt. $AC$ werde durch $H$, $I$, $K$ in vier gleiche Teile geteilt, und es sollen wiederum, wie in II 1, die Kurven $HQ$, $IP$, $KO$ so gelegt werden, daß alle Parallelen zu $AC$ gleichfalls in vier gleiche Teile geteilt werden. Dann verhält sich die Summe der um die „Diagonale" $AD$ liegenden Trapeze $AL$, $LM$, $MN$, $ND$ zum ganzen Trapez $AD$ wie $AH$ zu $AC$.

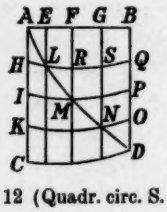


Abb. 12 (Quadr. circ. S. 141).

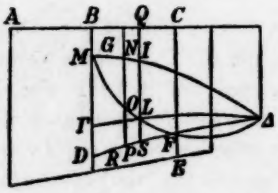


Abb. 13 (Quadr. circ. S. 144).

In II 3 und II 4 bereitet Lalouvère die dann von II 5 an auftretende Anwendung der Waage vor. Er nimmt (Abb. 13) die in $B$ halbierte Strecke $AC$, zieht $CE$ parallel $BD$ und legt die Kurven $GI$, $OL$ und $RS$ so dazwischen, daß für jede Parallele $NP$ zu $BD$ die Proportion

(4) $$AB:BQ = NP:NO$$ [48]

gilt. Dann wird behauptet:

1. $OL$ und $RS$ schneiden sich auf $CF$ in einem Punkte $F$.

2. $OL$ und $GI$ schneiden sich auf $BD$ in $M$, dem Schnittpunkt von $GI$ und $BD$.

3. Wenn sich $GI$ und $RS$ in einem Punkte $\Delta$ außerhalb von $CE$ schneiden, geht $OL$ auch durch $\Delta$.

---

[48] Eine solche Proportion ist maßgebend für fast alle Sätze, die Lalouvère mittels des Hebelgesetzes herleitet. Er erhält so eine Beziehung zwischen den Hebelarmen und den „Ordinaten" der drei Kurven, aus denen sich die zu ermittelnden Flächen zusammensetzen. Wenn also zwei der Kurven vorliegen, ist die dritte zwangsläufig Punkt für Punkt festgelegt.

4. Wenn eine Kurve $\Delta\Gamma$ alle zwischen $GI$ und $RS$ gelegenen Parallelen zu $BD$ verhältnisgleich schneidet, schneidet $\Delta\Gamma$ die Kurve $OL$ nur auf *einer* Parallelen zu $BD$.

Die Korollare bringen unwesentliche Ergänzungen.

II 4 beruht auf denselben Voraussetzungen wie II 3 und führt zu folgendem wichtigen Eindeutigkeitssatze (Abb. 14):

Wenn man durch die Proportion

$$AB:BQ = MD:MK$$

den Punkt $K$ bestimmt und $\Lambda$ zwischen $M$ und $K$ wählt, so gilt:

1. Die Kurve $\Lambda\Delta$, die alle zwischen $GI$ und $RS$ gelegenen Parallelen zu $BD$ verhältnisgleich schneidet, trifft $MO$ in dem zwischen $M$ und $O$ gelegenen Punkte $L$.

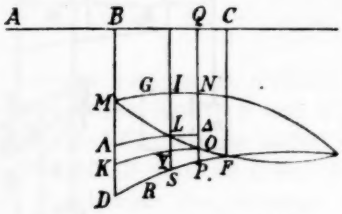


Abb. 14 (Quadr. circ. S. 150).

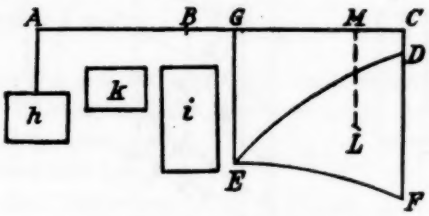


Abb. 15 (Entspr. Quadr. circ. S. 156).

2. Die in entsprechender Weise verhältnisgleich schneidende Kurve $KY$ schneidet $MO$ in ihrem Schnittpunkt $O$ mit $QP$.

In II 5 legt Lalouvère zum ersten Male sein Verfahren der Flächenvergleichung dar, wie er es im Anschluß an Archimedes[23] entwickelt hat. Gegeben ist (Abb. 15) die Waage $AC$ mit dem Drehpunkt $B$. Die Last $EFD$ sei in $G$ und $C$ aufgehängt, wobei $GC$ stets die größte Breite der Last darstellt, und werde durch die in $A$ hängende Kraft $h$ im Gleichgewicht gehalten. Ersetzt man dann $h$ durch andere Flächen $i$ und $k$ gemäß

$$i:EFD = BC:BA$$

beziehungsweise

$$k:EFD = BG:BA,$$

so ist

$$k < h < i.$$

Den Beweis führt Lalouvère folgendermaßen: Löst man die Aufhängungen $GE$ und $CF$ und hängt die Last in $M$ auf, wobei die Aufhängung $ML$ durch den Schwerpunkt $L$ von $EFD$ geht, so liegt $M$ zwischen $G$ und $C$. In diesem Falle hält $h$ das Gleichgewicht. Ersetzt man $BM$ durch die größere Strecke $BC$, so muß bei Gleichgewicht die in $A$ hängende Kraft $h$ gegen eine größere $i$ ausgetauscht werden; dasselbe gilt entsprechend für den kürzeren Lastarm $BG$ und die kleinere Kraft $k$. — Das Korollar überträgt die Überlegung auf Körper.

Lalouvères Ergebnis würden wir heute in der Form

$$\xi \int_a^b dF = \int_a^b x\,dF$$

schreiben, wobei $\xi$ die längs der $x$-Achse genommene Schwerpunktskoordinate der Fläche $F$ darstellt. Lalouvère hat dieses Ergebnis in geometrischer Form und anders als Torri-

celli[49] hergeleitet. Schon hier sei bemerkt, daß Lalouvère den Schwerpunkt als gegeben annimmt (vergleiche den Titel *Quadratura . . . ex dato centro gravitatis*) und von ihm auf den Inhalt schließt.

Anwendung findet Lalouvères Prinzip sogleich in den auf II 2 und II 4 fußenden Sätzen II 6, II 7 und II 8:

In II 6 hängt an einer Waage $AB$ (Abb. 16) mit dem Drehpunkt $C$ ein gemischtliniges Trapez $dGcb$[50], das gemäß II 2 affin unterteilt ist; insbesondere soll für jede Parallele zu $Cd$, zum Beispiel für $Ds$, gelten:

$$CA:CD = es:eu,$$

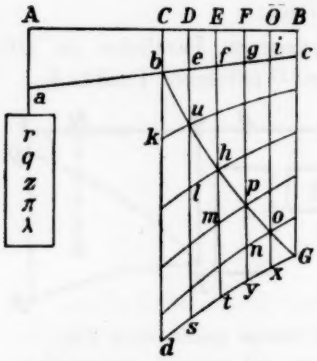


Abb. 16 (Quadr. circ. S. 161).

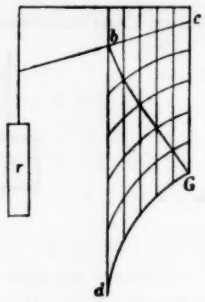


Abb. 17 (Quadr. circ. S. 165; es müßte $r = bGc$ sein).

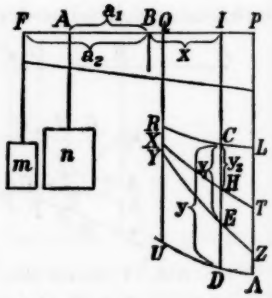


Abb. 18 (Quadr. circ. S. 172).

und es sollen die in $A$ hängenden Flächen $r$, $q$, $z$, $\pi$, $\lambda$ mit den Trapezen $de$, $sf$, $tg$, $yi$, $xc$ im Gleichgewicht sein. Es wird behauptet:

$$(\text{Trapeze } ek + fl + gm + in + cx) > (r + q + z + \pi + \lambda);$$

$$(\text{Trapeze } fu + gh + ip + co) < (q + z + \pi + \lambda) < (r + q + z + \pi + \lambda).$$

Korollar 2 überträgt den Satz auf Körper.

In II 7 (Abb. 17) folgert Lalouvère dann unter denselben Voraussetzungen wie in II 6, daß Gleichgewicht zwischen $r$ und $dGcb$ besteht, wenn $r = bGc$ ist; es handelt sich also um die geometrische Deutung der Formel:

$$\int_0^{x_0} xy\,dx = a\int_0^{x_0} \eta\,dx;\quad xy = a\eta.$$

Der apagogische Beweis benutzt die vorhergehenden Sätze des Buches und das (oft nach Archimedes benannte) Axiom der Meßbarkeit[51].

Im Satz II 8 hängt (Abb. 18) die Fläche $UD\Lambda LCR$ als Last in den Punkten $Q$ und $P$ einer Waage mit dem Drehpunkt $B$; der Last werde durch die in $A$ befindliche Fläche $n$ oder die in $F$ befindliche Fläche $m$ das Gleichgewicht gehalten. Bestimmt man die Kurven

---

[49] Brief an Cavalieri vom 7. 4. 1646 in: E. Torricelli: *Opere* ed. G. Loria e G. Vassura, Band III. Faenza 1919, S. 365—67. Vergleiche auch H. Wieleitner: *Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts, insbesondere über Schwerpunktsbestimmungen.* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abteilung B, 1 (1929—30), 216f.

[50] Um Bezeichnungsschwierigkeiten zu vermeiden, behalte ich hier und in ähnlichen Fällen die kleinen Buchstaben Lalouvères bei.

[51] Wenn $a > b$ ist, so läßt sich zu jedem $m$ ein $c$ so finden, daß $c(a-b) > m$ wird. Vergleiche Archimedes[35], *De sphaera et cylindro,* Postulat 5.

$XHT$ und $YEZ$ so, daß für jede durch den zwischen $Q$ und $P$ gelegenen Punkt $I$ gezogene Parallele zu $QU$

$$BA:BI = CD:CE$$

und

$$BF:BI = CD:CH$$

ist, so soll gelten:

$$BA:BF = CH:CE = XHTLCR:YEZLCR.$$

Analytisch: Aus $x:a_1 = y_1:y$ und $x:a_2 = y_2:y$ folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} xydx = a_1 \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx = a_2 \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx;$$

denn

$$a_1:a_2 = y_2:y_1 = \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx : \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx.$$

Im Korollar wird gesagt, daß sich die Kraftarme $BA$ und $BF$ umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Kräfte $n$ und $m$, mit anderen Worten, daß die Momente gleich sind ($n \cdot BA = m \cdot BF$). Daran ändert sich auch nichts, wenn die Last $UDALCR$ statt an $Q$ und $P$ an einer Schwerlinie hängt.

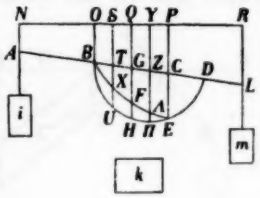


Abb. 19
(Quadr. circ. S. 175).

Nun kommt der wichtige Satz II 9, in dem Lalouvère eine Quadratrix einführt, die die Quadratur einer krummlinig begrenzten Fläche nach Art der bisher betrachteten leistet. Gegeben ist (Abb. 19) die gleicharmige Waage $NP = 2a$ mit dem Drehpunkt $O$. Die zu quadrierende Fläche $TUH\Pi Z$ ($UH\Pi$ ein Kegelschnitt) ist in $S$ und $Y$ aufgehängt, wobei diese Punkte auch beide oder zum Teil mit $O$ und $P$ zusammenfallen können. Mit $TUH\Pi Z$ ist die in $A$ hängende Fläche $i$ im Gleichgewicht. Nimmt man $P$ als Drehpunkt der gleicharmigen Waage $OR$, so soll $m$ mit $TUH\Pi Z$ im Gleichgewicht sein. Dann behauptet Lalouvère, daß

$$TUH\Pi Z = i + m$$

ist, wobei $m$ gleich einer gegebenen Fläche $k$ ist. Das ist aber sofort ersichtlich, wenn man $OR$ als $x$-Achse, $OB$ als $y$-Achse nimmt, $OS = a_1$, $OY = a_2$ setzt und die Ordinate von $TUH\Pi Z$ mit $y$ bezeichnet:

$$ia = \int_{a_1}^{a_2} xydx,\ ma = \int_{a_1}^{a_2} (a-x)\, ydx, \tag{5}$$

somit

$$i + m = \int_{a_1}^{a_2} ydx. \tag{6}$$

Lalouvère bestimmt auf jeder zwischen $S$ und $Y$ gelegenen Parallelen $QH$ zu $SU$ einen Punkt $F$ vermittels der Proportion

$$GF:GH = OQ:NO^{52} \tag{7}$$

und nennt die so entstehende Kurve $XF\Lambda$ Quadratrix. Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen darstellen: Es ist

$$\int_{a_1}^{a_2} xydx = \int_{a_1}^{a_2} a \cdot \frac{xy}{a}\, dx = a \int_{a_1}^{a_2} qdx, \tag{8}$$

[52] Ein besonders deutliches Beispiel für die in [48] gegebene Erläuterung. — Lalouvère hat versehentlich $SQ$ statt $OQ$ geschrieben.

wenn man die Ordinate der Quadratrix mit $q$ bezeichnet. Aus (5) und (8) folgt

$$i = \int_{a_1}^{a_2} q dx;$$

nach (6) ist aber

$$i + m = \int_{a_1}^{a_2} y dx,$$

so daß sich

$$\int_{a_1}^{a_2} y dx = \int_{a_1}^{a_1} q dx + m$$

ergibt. Da aber $m = k$ gegeben war, bewirkt $q$ die Quadratur von $y$. Wenn $S$ mit $O$ und $Y$ mit $P$ zusammenfällt, wird $X = B$ und $\Lambda = E$; und wenn $UH\Pi$ die Gerade $BC$ in $B$ und $D$ schneidet, fallen $Z$, $\Lambda$ und $\Pi$ mit $D$ zusammen. (Dieselbe Quadraturmethode hat Fermat: *De aequationum localium transmutatione et emendatione*, I 273.)

II 10 ist eine wichtige Weiterführung von II 9 in Verbindung mit II 8: Lalouvère lehrt, wie man durch Verlagerung des Drehpunkts der Waage die Momente so umformen kann, daß die das Gleichgewicht haltende Kraft der Differenz gegebener Kräfte gleich ist. Anwendung findet diese „Transformation" besonders in V 12 und V 16.

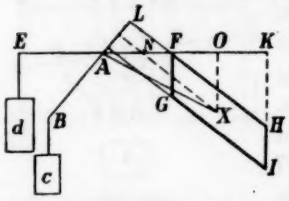


Abb. 20 (Entspr. Quadr. circ. S. 184; $EK$ und $BL$ liegen in der Zeichenebene).

Originell ist II 11, wo Lalouvère Konstruktionen am geneigten Hebelarm ausführt, insbesondere eine vom Drehpunkt der Waage ausgehende Gerade konstruiert, auf der der Schwerpunkt der Last liegen muß. Lalouvère nimmt (Abb. 20) eine Last $GIHF$ (zum Beispiel ein Parallelogramm), der an der Waage $AK$ durch die Kraft $d$ (Kraftarm $AE$) und an der in derselben Ebene liegenden Waage $AL$ durch die Kraft $c$ (Kraftarm $AB = AE$) das Gleichgewicht gehalten wird. Dabei ist die Last jeweils in ihren äußersten Punkten aufgehängt. Auf $AK$ wird der Punkt $N$ beliebig und dann $AO$ durch die Beziehung

$$\frac{c}{d} = \frac{AL \cdot AN}{AF \cdot AO}$$

bestimmt. Wenn dann $X$ Schnittpunkt der Parallelen zu $LF$ und $KH$ durch $N$ beziehungsweise $O$ ist, so liegt der Schwerpunkt von $GIHF$ auf $AX$. Der Beweis wird unter Benutzung von I 8 indirekt geführt. Im Korollar 1 steht, daß sich die Kräfte $c$ und $d$ wie die Cosinus der Winkel zwischen $AX$ und dem zugehörigen Lastarm verhalten:

$$\frac{c}{d} = \frac{\cos(LAX)}{\cos(KAX)};$$

daraus folgert Lalouvère, daß $X$ niemals auf $NO$ liegen kann (Kor. 2).

In II 12 führt Lalouvère die bisherigen Entwicklungen des Buches II zu einem gewissen Abschluß; der Satz ist ein Musterbeispiel dafür, was einem Mathematiker von der anschaulich-geometrischen Kraft Lalouvères *stylo vetere* gelingen kann.

In großen Zügen ist der bisherige Aufbau des Buches II doch der, daß zunächst krummlinige Trapeze affin unterteilt werden (II 1 und 2); dann werden die „Ordinaten" der dabei auftretenden Kurven zu den Abschnitten einer Geraden in Beziehung gesetzt (II 3 und 4), die nach allgemeiner Erörterung des Hebelprinzips (II 5) als Waagebalken dient, so daß die in II 1 und II 2 eingeführte Fläche in II 6 und 7 quadriert werden kann. Die Sätze II 8 bis 10 bringen Besonderheiten für den Fall mehrerer „Kräfte", wogegen in II 11 die Lage des Schwerpunktes einer „Last" näher bestimmt wird.

In II 12 ist der Waagebalken $NQ = 3a$ durch $O$ und $P$ in drei gleiche Teile geteilt (Abb. 21). $BT$ ist eine Gerade, und $B\Theta$, $BX$ und $VU$ sind Kegelschnitte oder Geraden, wobei $B\Theta$ zwischen $BT$ und $VU$ liegen soll und für jeden Punkt (zum Beispiel $E$) auf $BT$

(9) $$AB:BE = NO:OY = GM:MH$$

gilt. Dann soll beispielsweise für den rechts von $PW$ gelegenen Teil der Figur (für die linke Hälfte gilt Entsprechendes) diejenige Kraft, die in $O$ hängend der Last $Z\Theta T\Lambda$ das Gleichgewicht hält (Drehpunkt $P$) gleich sein der Differenz aus der in $N$ hängenden Kraft, die der Last $SUT\Lambda$ das Gleichgewicht hält (Drehpunkt $O$), und der Fläche $IXT\Lambda$.

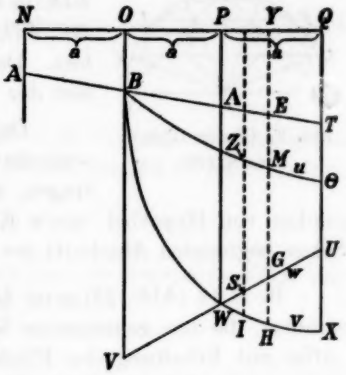

Abb. 21 (Entspr. Quadr. circ. S. 190).

Das läßt sich folgendermaßen einsehen: Bezeichnet man die Ordinaten der Kurven $B\Theta$, $BX$, $VU$ der Reihe nach mit $u$, $v$, $w$, und die Kräfte (in der Reihenfolge der Behauptung) mit $y$ und $z$, so soll

$$y = z - \int_{x_1}^{x_2} v\,dx$$

sein. Dabei ist

$$\frac{a}{a+x} = \frac{w-u}{v-u}; \qquad ay = \int_{x_1}^{x_2} xu\,dx, \qquad az = \int_{x_1}^{x_2} (a+x)w\,dx,$$

also unter Berücksichtigung von (9)

$$a(z-y) = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(a+x)w - xu]}_{av}\,dx = a\int_{x_1}^{x_2} v\,dx.$$

Bei Lalouvère ist $x_2 = a$; er sagt alles in Kegelschnittbögen, meint es aber allgemein.

Im Korollar 1 wird der Fall erörtert, daß $B\Theta$ nicht zwischen $BT$ und $VU$, sondern $BT$ zwischen $VU$ und $B\Theta$ liegt, wodurch $G$ und $H$ auf verschiedenen Seiten von $B\Theta$ liegen. Im Korollar 2 folgert Lalouvère, daß sich umgekehrt bei gegebener Kraft $z$ und gegebener Fläche $\int_{x_1}^{x_2} v\,dx$ stets eine Kraft $y$ finden läßt, die der Differenz $z - \int_{x_1}^{x_2} v\,dx$ gleich ist und $\int_{x_1}^{x_2} u\,dx$ das Gleichgewicht hält. Dasselbe gilt für die im Korollar 1 dargelegte Lage der Kurven.

In II 13 weist Lalouvère zunächst darauf hin, daß bereits Archimedes lehrte, daß der Schwerpunkt eines Parabelsegments auf dem Durchmesser liegt[53]. Commandino habe behauptet, daß sich das Archimedische Ergebnis auch auf die Segmente der anderen Kegelschnitte ausdehnen lasse[54]. Archimedes schreibt die Figuren dem Parabelsegment γνωρίμως ein[55], und dieses von Lalouvère mit *nota et condicta ratione* bezeichnete Verfahren führt dieser für die Segmente der anderen Kegelschnitte, also solcher mit Mittel-

---

[53] Archimedes[22]: *De aequiponderantibus* II 4.

[54] F. Commandino: *De centro gravitatis solidorum.* Bologna 1565.

[55] Archimedes[22]: *De aequiponderantibus* II 2. Hier schreibt Archimedes dem Parabelsegment ein Dreieck von gleicher Grundseite und Höhe ein, den Restsegmenten wiederum je ein Dreieck von gleicher Grundseite und Höhe, und so fort. Es sind dann die Verbindungsgeraden der zum Scheitel des gegebenen Segments jeweils symmetrisch liegenden „Spitzen" der eingeschriebenen Dreiecke parallel der Sehne des gegebenen Segments.

punkt, aus: Sei *BDC* ein Segment der beschriebenen Art (Abb. 22). Man halbiere *BC* in *A* und ziehe den Durchmesser *AD*. Dann halbiere man die Sehnen *BD* und *DC* in *N* und *O*. Die Durchmesser der Restsegmente schneiden den Bogen *BDC* in *F* und *I*. Wiederholt man das Verfahren mit den Sehnen *BF*, *FD*, *DI*, *IC*, so erhält man die Punkte *G*, *E*, *H*, *K* und so fort. Dann sind die Verbindungsgeraden *FI*, *GK*, *EH* und so fort der Sehne *BC* parallel.

Abb. 22 (Entspr. Quadr. circ. S. 199).

Damit ist das von Archimedes für Parabelsegmente entwickelte Verfahren auf die anderen Kegelschnittsegmente übertragen, so daß gefolgert werden kann, daß auch die Schwerpunkte von Hyperbel- sowie Kreis- und Ellipsensegmenten auf dem von Bogen und Sehne begrenzten Abschnitt des Durchmessers liegen.

In II 14 (Abb. 23) setzt Lalouvère zwei Kegelschnittsegmente *BEC* und *BFC* zusammen, die eine gemeinsame Sehne *BC* mit dem Mittelpunkt *D* haben und zueinander „affin mit Erhaltung des Flächeninhalts" (siehe S. 13) sein sollen; ferner sollen ihre Durchmesser *DE* und *DF* auf derselben Geraden *EF* liegen. Wenn dann die Segmente

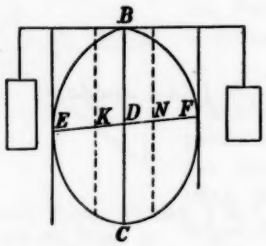

Abb. 23 (Entspr. Quadr. circ. S. 202).

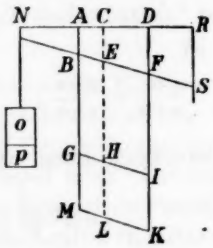

Abb. 24 (Entspr. Quadr. circ. S. 207).

*BEC* und *BFC* die Schwerpunkte *K* und *N* haben (diese liegen gemäß II 13 auf den jeweiligen Durchmessern), wird die Strecke *KN* durch die gemeinsame Sehne *BC* halbiert, und der Schnittpunkt *D* ist der Schwerpunkt der ganzen Figur *ECFB*. Der Beweis wird unter Benutzung von II 7 mittels des Hebelgesetzes geführt.

Ganz entsprechend beweist Lalouvère den Satz II 15. Hier handelt es sich um die Lage der Schwerpunkte affiner Figuren in bestimmter Lage. Gegeben seien (Abb. 24) die (von Geraden oder Kegelschnitten begrenzten) Figuren *GIFB* und *MKIG*. Wenn dann die Richtung *RS* vorgegeben ist, sollen alle Parallelen zu *RS* (zum Beispiel *EL*) die gegebenen Figuren im selben Verhältnis schneiden:

$$EH:HL = BG:GM.$$

Dann behauptet Lalouvère, daß die Schwerpunkte von *GIFB*, *MKIG* und *MKFB* auf einer und derselben Parallelen zu *RS*, also auf der nämlichen Ordinate, liegen.

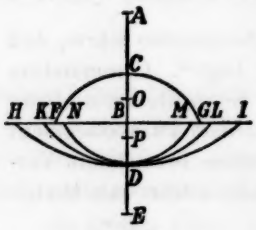

Abb. 25 (Quadr. circ. S. 210).

II 16 stellt insofern eine Verallgemeinerung von II 14 dar, als von den zwei gegebenen Kegelschnittsegmenten *FCG* und *HDI* (Abb. 25) nicht die Gleichheit der Sehnen verlangt wird. Die Kegelschnitte mögen die Mittelpunkte *E* und *A* haben, ferner sollen die Proportionen

$$BD^2:BC^2 = FG:HI$$

und
$$BD:BC = AD:EC$$
bestehen. Dann behauptet Lalouvère, daß $B$ der Schwerpunkt der zusammengesetzten Figur $HDIGCF$ ist.

Interessant ist die Beweisführung; Lalouvère konstruiert zunächst den Kegelschnitt $KDL$ (Mittelpunkt $A$) mittels
$$BD:BC = FG:KL$$
und zeigt dann mit Benutzung von I 22 Korollar 4 und 5 (S. 14), daß die Segmente $KDL$ und $FCG$ gleich sind und die Segmente $KDL$ und $HDI$ sich wie $KL$ zu $HI$ verhalten. Mit Hilfe der Beziehung
$$BD:BC = NM:FG$$
wird dann der Kegelschnitt $NDM$ (Mittelpunkt $A$) bestimmt; die Segmente $NDM$ und $FCG$ sind ähnlich und haben die Schwerpunkte $P$ und $O$, wobei
$$BD:BC = BP:BO$$
ist. Andererseits sind die Segmente $NDM$ und $HDI$ affin und haben die Sehnen auf derselben Geraden $HI$; also muß auch $HDI$ gemäß II 13 und II 15 $P$ zum Schwerpunkt haben. Daß $HDIGCF$ den Schwerpunkt $B$ hat, ergibt sich dann einfach daraus, daß $HDI$ den Schwerpunkt $P$, $FCG$ den Schwerpunkt $O$ hat und
$$HDI \cdot BP = FCG \cdot BO$$
ist.

In II 17 hängt Lalouvère (Abb. 26) zwei Flächen $CDBA$ und $GHFE$ in den Punkten $M, N, O, P$ an die Waage $IK$, wobei $I$ und $K$ die „Abszissen" der Schwerpunkte der beiden Flächen sind. $L$ sei „Abszisse" des Schwerpunkts der aus den beiden gegebenen Flächen zusammengesetzten Figur und Drehpunkt der gleicharmigen Waage $RLQ$. Dann wird behauptet: Wenn die in $Q$ und $R$ hängenden Kräfte $s$ und $t$ den Lasten $CDBA$ und $GHFE$

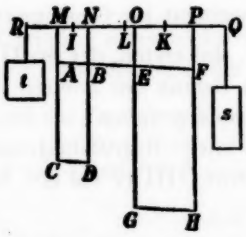

Abb. 26 (Entspr. Quadr. circ. S. 214).

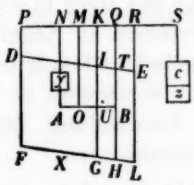

Abb. 27. (Quadr. circ. S. 218).

das Gleichgewicht halten, ist $s = t$. Lalouvère beweist auch die Umkehrung, wonach aus der Gleichheit von $s$ und $t$ folgt, daß $L$ „Abszisse" des Schwerpunkts von $(CDBA + GHFE)$ ist. Der Beweis fußt auf II 8.

In II 18 schließlich, dem letzten des Buches, wird eine Figur $FLED$ (Abb. 27) in die beiden Teile $FGID$ und $GLEI$ geteilt, deren letzter den Schwerpunkt $B$ habe. $FLED$ sei in $P$ und $R$ an der Waage $PS$ aufgehängt. Das Lot $BQ$ von $B$ auf $PS$ liege außerhalb $FGID$. Dann wird behauptet:

1. Nimmt man $Q$ als Drehpunkt, so neigt sich die Waage nach $FGID$.

2. Wenn dann das in $S$ hängende Rechteck $c$ jene Neigung aufhebt, ist $c$ mit $FGID$ im Gleichgewicht. Ferner ist $c$ auch mit der ganzen Fläche $FLED$ im Gleichgewicht, wenn diese Fläche in ihrem Schwerpunkt aufgehängt ist.

Interessant ist das auf II 17 beruhende Korollar 2: Die Waage $PR$ habe den Drehpunkt $Q$, und die Gerade $QH$ teile die in $P$ und $R$ aufgehängte Fläche $FLED$ in die Teile $FHTD$ und $HLET$, wobei der erste den Schwerpunkt von $FLED$ enthalte. Ferner mögen die Kräfte $(c+z)$ und $y$ den Lasten $FHTD$ und $HLET$ das Gleichgewicht halten, wobei die Kraftarme $QS$ und $QN$ gleich sein sollen. Wenn dann $y=z$ ist, hält $c$ der ganzen Fläche $FLED$ das Gleichgewicht. —

Man erkennt an diesem Buch, daß Lalouvère die Ansätze seines Vorbilds Archimedes, insbesondere dessen Lehre vom Gleichgewicht[22] und die Parabelquadratur[23], mit sicherem mathematischem Gefühl fortgeführt hat. Es verdient Anerkennung, wie Lalouvère aus den wenigen grundlegenden Sätzen II 5 bis 7 ein System von Schwerpunktsbetrachtungen entwickelt hat, das hinter einer Fülle interessanter Einzelergebnisse ganz allgemeine Ansätze birgt. —

Die beiden ersten Bücher unseres Werkes stellen gewissermaßen die Vorbereitung für die nun folgende *Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis* dar. Wir wollen kurz zusammenfassen, inwiefern Lalouvère bisher über Archimedes hinausgelangt ist:

Archimedes bearbeitet Parabelsegmente, Lalouvère geht auf gemischtlinige Flächen ein, die von anderen Kegelschnitten, ja sogar von anderen stetig diffenzierbaren doppelpunktfreien Kurven begrenzt werden (Buch I). Behandelt Archimedes die Schwerpunkte ebener geradliniger und parabolischer Flächen, so unterzieht Lalouvère die in Buch I rein „geometrisch" betrachteten Flächen in Buch II Schwerpunktsbetrachtungen.

## § 6. Buch III.

In diesem Buch will Lalouvère die Quadratur von Kreis und Hyperbel durchführen. Er denkt sich den Mittelpunkt des betreffenden Kegelschnitts (die Parabel scheidet ja als schon von Archimedes quadriert aus) als Drehpunkt einer Waage und sucht diejenige geradlinig begrenzte Fläche, die mit dem Kegelschnittsegment im Gleichgewicht ist.

Man kann das Buch in drei Abschnitte unterteilen. Im ersten, der bis III 9 reicht, werden Proportionen an Kegelschnitten aufgestellt. Zu Beginn des zweiten Abschnitts wird eine Kegelschnittkonfiguration (*systema nota methodo descriptum*), die bereits durch III 8 und III 9 vorbereitet ist, definiert; dann folgen weitere Begriffsbildungen, die in III 10 bis 16 Verwendung finden. Der letzte Abschnitt (III 17 bis 20) bringt die eigentlichen Quadraturen.

In III 1 bringt Lalouvère einen Sonderfall eines schon Archimedes bekannten Parabelsatzes[56]: $BD$ sei Durchmesser (oder eine Parallele zum Durchmesser) des Parabelsegments $ABC$ (Abb. 28). Man ziehe $BC$ und zu $BD$ eine Parallele $FH$, die die Parabel in $G$ schneidet. Dann ist

$$FH:HG = DA:DF$$

beziehungsweise (Kor.)

$$FH:FG = DA:AF.$$

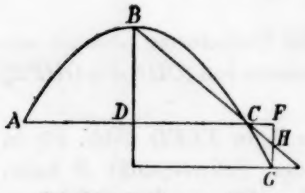

Abb. 28 (Quadr. circ. S. 224).

Auch III 2 kommt bei Archimedes vor[57]: Hier werden (Abb. 29) an das Parabelsegment $ABC$ mit dem Durchmesser $BD$ die Tangente $CF$ gezogen sowie zu $BD$ die

[56] Archimedes[23]: *Quadratura parabolae* 4.
[57] Archimedes[23]: *Quadratura parabolae* 5.

Parallelen $AF$ und $KL$, deren letzte die Parabel in $H$ schneidet. Dann ist

$$AK:KC = KH:HL$$

beziehungsweise (Kor.)

$$AK:AC = KH:KL.$$

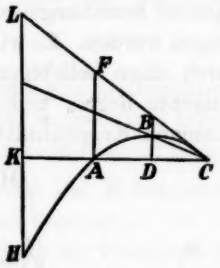


Abb. 29 (Quadr. circ. S. 228).

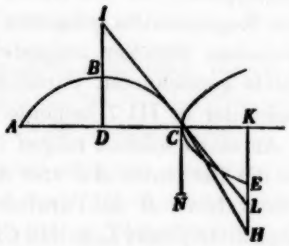


Abb. 30 (Entspr. Quadr. circ. S. 231).

In III 3 ist ein Parabelsegment $ACB$ gegeben (Abb. 30) mit der Sehne $AC$ und dem Durchmesser $BD$; $IC$ ist Tangente. $CE$ ist ein Zweig einer Hyperbel, deren Hauptachse $AC$ und deren Parameter $CN$ ist. Wenn dann die Größe $o$ durch

$$o:CN = CD:DI$$

bestimmt und durch den auf der Verlängerung von $AC$ beliebig gewählten Punkt $K$ die Parallele zu $BD$ gezogen wird, die die Hyperbel in $E$ und die Parabel in $H$ schneidet, ist

$$o \cdot KH = KE^2.$$

Das kann analytisch folgendermaßen ausgedrückt werden: Die Hyperbel habe die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

so daß $C$ Ursprung eines rechtwinkligen cartesischen Systems mit $AK$ als $x$-Achse ist. Hat dann der Parabelscheitel die Ordinate $m$, so lautet die Parabelgleichung:

$$y = -\frac{2m}{a}x - \frac{m}{a^2}x^2.$$

Dann ist $o = \frac{ap}{m}$, und für $K \triangleq (x_0; 0)$ ergibt sich

$$KE^2 = 2px_0 + \frac{p}{a}x_0^2 = o \cdot KH.$$

Der Satz gilt auch, wenn $K$ innerhalb $AC$ liegt, sofern die Hyperbel durch die entsprechende Ellipse ersetzt wird (Kor. 1); diese wird für $AC = DI = CN$ zu einem Kreis mit dem Durchmesser $AC$ (Kor. 3). In Korollar 2 wird gesagt, daß für alle rechts von $C$ gelegenen Parallelen zu $KH$ sich die Quadrate der Hyperbelordinaten wie die Parabelordinaten verhalten; denn $o$ ist von der Abszisse von $K$ unabhängig.

In III 4 und III 5 bringt Lalouvère Doppelberührungen von Kegelschnitten, und zwar in III 4 von Parabel und Hyperbel, in III 5 von Parabel und Ellipse[58]. Es wird

[58] Vergleiche Keplers *Nova stereometria doliorum vinariorum.* Linz 1615 (= J. Kepler: *Opera omnia* ed. Chr. Frisch, Frankfurt/M. und Erlangen 1858—71, Band IV, S. 551—646), Teil I, Satz 28 (Ostwalds Klassiker Nr. 165, Leipzig 1908, S. 41—43). Hier geht Kepler davon aus, daß sich Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel in je einem Scheitelpunkte berühren, und zeigt, daß die Kurven noch zwei Punkte gemeinsam haben, die aber Schnittpunkte sein müssen. Berühren sie sich andererseits in zwei Punkten, so haben sie keinen dritten Punkt gemeinsam; diesen Fall legt Lalouvère zugrunde.

dargetan, daß in jedem der beiden (symmetrisch gelegenen) Berührungspunkte genau eine gemeinsame Tangente existiert und im übrigen zwischen den Hyperbel- (bzw. Ellipsen-) und Parabelordinaten eine Beziehung nach Art der in III 3 gegebenen besteht.

Auch die Sätze III 6 und III 7 gehören zusammen, und zwar handelt es sich hier um Tangentenpaare, die von einem außerhalb einer Hyperbel beziehungsweise eines geschlossenen Kegelschnitts gelegenen Punkte an diese gezogen werden. Es wird eine Proportion zwischen Strecken aufgestellt, die auf einer durch einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts gezeichneten Parallelen zu der einen Tangente liegen, und zwar werde zum Beispiel der in III 7 behandelte Fall eines geschlossenen Kegelschnitts näher betrachtet: An einen solchen mögen (Abb. 31) von $A$ aus die Tangenten $AB$ und $AC$ gelegt werden, dann durch $B$ die Parallele $BK$ zu $AC$ mit dem Mittelpunkt $L$, so daß $CL$ Durchmesser wird. Zieht man durch einen beliebigen Punkt $F$ des Kegelschnitts diejenige Parallele zu $AC$, die die Schnittpunkte $D$, $E$, $G$, $H$, $I$ liefert, so ist

$$DF:FE = FE:EH$$ [59].

Abb. 31 (Quadr. circ. S. 250).

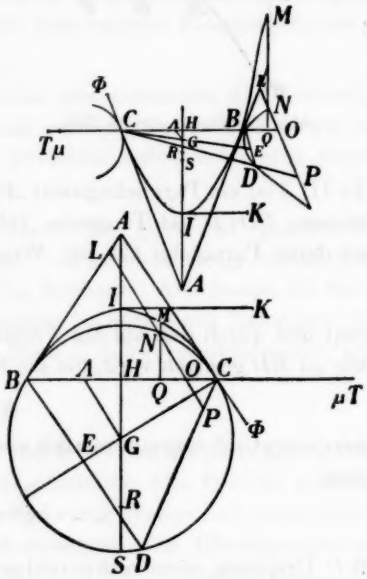


Abb. 32 (Quadr. circ. S. 253).

Die Sätze III 8 und III 9 liefern, auf III 4 bis 7 fußend, das schon erwähnte *systema nota methodo descriptum*. Gegeben sei (Abb. 32) ein Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt $G$. An ihn werden von $A$ aus zwei Tangenten gezogen mit den Berührungspunkten $B$ und $C$. Man zeichnet $CG$ und hierauf von $B$ aus die Gerade $BD$ parallel $AC$, wobei $BD$ von $CG$ in $E$ halbiert wird. Man verbindet $CD$, $AG$ und $BC$; $H$ ist Schnittpunkt von $AG$ und $BC$, $I$ Mittelpunkt von $AH$. Mittels der Proportion

$$IH:HC = HC:IK$$

wird $IK$ bestimmt; $IK$ sei Parameter, $IH$ Durchmesser und $I$ Scheitel einer Parabel, die nach III 4 und III 5 durch $B$ und $C$ geht. Man bestimmt $S$ durch die Proportion

$$AH:AC = HR:HS$$

(wobei $HR = 2\,HG$) und $T$ durch

$$BD:BC = HS:CT.$$

[59] Vergleiche Gregorius a S. Vincentio, a. a. O. [12] VII 52, S. 745 (J. E. Hofmann, a. a. O. [15], S. 38, Abbildung 48).

Zieht man dann durch einen beliebigen Punkt $O$ auf $BC$ die Parallele $LNOP$ zu $AC$ und durch $N$ die Parallele $MNQ$ zu $IH$, so ist

$$CT:CO = LN:NM.$$

III 9: Zieht man ferner durch $G$ die Parallele $G\Lambda$ zu $AC$, so verhält sich

$$CT:C\Lambda = AC:AH.$$

Es folgen nun Definitionen von *systema nota methodo descriptum*, *lunula parabolica* mit dem *arcus superior* und *inferior*, *cuspides xystroides* mit der *falx superior* und *inferior*, *exparabola*, *lunula* (*cuspis*) *exparabolica*, *quadratrix*, *lunula* (*cuspis*) *media*.

Es werde die Konfiguration *systema ... Kegelschnittsystem* genannt. $B$ und $C$ heißen *Berührungspunkte*, $BC$ *Berührungssehne*, $AB$ und $AC$ *Systemtangenten* (davon diejenige, zu der die Parallelen gezogen werden — hier $AC$ —, *Haupttangente*), $G$ *centrum systematis*, $AH$ *diameter recta*, die Parallele zu $BC$ durch $G$ *diameter transversa*, $C\Lambda$ *Systemarm*. Ist der Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt $G$ ein geschlossener (Kreis, Ellipse), so entsteht eine *lunula parabolica* zwischen ihm (=*arcus inferior*) und der Parabel (=*arcus superior*); ist der Kegelschnitt dagegen eine Hyperbel, so entstehen *cuspides xystroides* zwischen deren Zweigen (=*falces inferiores*) und der Parabel (=*falx superior*).

Die *Exparabel* entsteht folgendermaßen: Man drehe die Abschnitte aller zwischen *arcus* (beziehungsweise *falx*) *superior* und *inferior* gelegenen Parallelen zur *diameter recta* um ihren Schnittpunkt mit dem *arcus* (beziehungsweise der *falx*) *inferior*, bis sie parallel zur *diameter transversa* liegen. Dann beschreiben die anderen Endpunkte die Exparabel. Die Fläche zwischen Exparabel, *arcus* (*falx*) *inferior* und der beziehungsweise den Parallelen zur *diameter transversa* heißt *lunula* (*cuspis*) *exparabolica*.

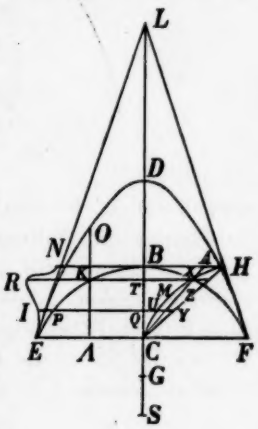

Abb. 33.
(Quadr. circ. S. 274).

Analytisch: Die Ellipse $EBF$ und die Parabel $EDF$ (Abb. 33) haben $EL$ und $FL$ als gemeinsame Tangenten. Wählt man die Berührungssehne $CE$ zur $x$-Achse und $CD$ zur $y$-Achse eines rechtwinkligen cartesischen Systems und gibt den Berührungspunkten die Abszissen $\pm a$, so lautet für positives $\alpha$ und $\beta$ die Gleichung der Parabel $EDF$

$$\alpha y = a^2 - x^2, \tag{10}$$

die der Ellipse $EBF$

$$\alpha\eta + \beta\eta^2 = a^2 - x^2. \tag{11}$$

Die Exparabel $EIRN$ mit den laufenden Koordinaten $u$; $v$ ist dann gegeben durch:

$$\begin{cases} u = x + y - \eta \\ v = \eta, \end{cases} \tag{12}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$y - \eta = \frac{\beta\eta^2}{\alpha}, \tag{13}$$

und aus (12) ergibt sich einerseits

$$\begin{cases} u = x + \frac{\beta\eta^2}{\alpha} \\ v = \eta, \end{cases}$$

andererseits

$$(14)\qquad \begin{cases} x = u - \dfrac{\beta v^2}{\alpha} \\ \eta = v. \end{cases}$$

Somit ist die Exparabel $(u;\ v)$ birational auf die Ellipse $(x;\ y)$ bezogen.

Übrigens ist die Exparabel $EIRN$ eine rationale Kurve. Ihre Gleichung erhält man aus (11) und (14) in der Form

$$\alpha v + \beta v^2 + \left(u - \frac{\beta}{\alpha} v^2\right)^2 = a^2.$$

Abbildung 34 gibt die Exparabel (mit nach rechts positiver Abszissenachse) für die Werte $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $a = 3$ in dem (von Lalouvère allein betrachteten) Fall der Be-

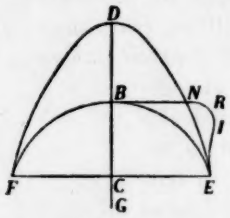

Abb. 34.

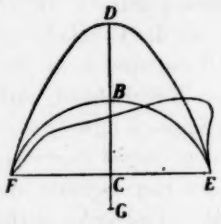

Abb. 35.

schränkung auf den ersten Quadranten wieder; in der Abbildung 35 sind auch im zweiten Quadranten die Ordinatendifferenzen nach rechts umgelegt.

Des Zusammenhangs wegen sollen anschließend die Sätze III 12 und III 13 besprochen werden, in deren letztem eine *lunula exparabolica* quadriert wird; III 12 ist ein zum Beweis benötigter Hilfssatz.

In III 12 ist die Parabel geometrischer Ort für eine Proportion am Dreieck: Es seien das Dreieck $ABC$ und eine Strecke $g$ gegeben (Abb. 36); zieht man dann durch einen

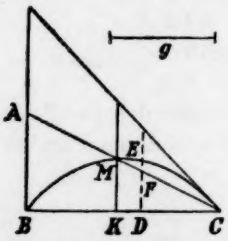

Abb. 36 (Entspr. Quadr. circ. S. 268).

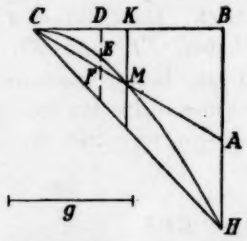

Abb. 37 (Quadr. circ. S. 268).

beliebigen Punkt $D$ auf $BC$ die Parallele $DF$ zu $BA$, so liegt der durch

$$g : BD = DF : DE$$

bestimmte Punkt $E$ auf einer Parabel, deren Segment $BMC$ den Durchmesser $KM$ hat $(BK = KC)$. Wenn die Proportion in der Form

$$(15)\qquad g : CD = DF : DE$$

angesetzt wird, so berührt die Parabel $CEH$ die Gerade $BC$ in $C$ (Abb. 37). Hieraus folgert Lalouvère im Korollar das Archimedische Ergebnis[60], wonach die Parabel $CEH$ das Dreieck $HBC$ im Verhältnis 1:2 teilt.

[60] Archimedes[22]: *Quadratura parabolae* 15 und 16.

In III 13 (Abb. 33, S. 26) bilden die Ellipse $EBF$ (Mittelpunkt $G$) und die Parabel $EDF$ ein Kegelschnittsystem derart (siehe S. 26—27), daß $BD = BH (= BN)$ ist, wobei $H$ und $N$ auf den Systemtangenten $LF$ beziehungsweise $LE$ liegen. $CMH$ sei ein Parabelbogen, der $BC$ in $C$ berührt und zu $BH$ parallele Durchmesser hat. Dann behauptet Lalouvère, daß die *lunula exparabolica* $EBNRI$ flächengleich ist der durch die Parabel $CMH$ und die Geraden $BC$ und $BH$ begrenzten Fläche; dasselbe soll von allen durch Parallelen zur Berührungssehne $EF$ herausgeschnittenen Streifen jener Flächen (zum Beispiel $IPKR = QUZT$[61]) gelten.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die beiden verglichenen Flächen aus allen Parallelen zu $EF$ gleiche Abschnitte herausschneiden. Es soll also beispielsweise $RK = TZ$ sein, wobei $RZ$ die durch den beliebigen Punkt $T$ auf $BC$ gezogene Parallele zu $EF$ ist: Man ziehe $BA = BC$; dann soll $RT$ die Gerade $AC$ in $X$, die Parabel $CMH$ in $Z$ schneiden. Nun ist nach (15) in III 12

$$CS : CT = TX : TZ = CT : TZ$$

(wobei $CS = 2\,CG$), andererseits nach III 5 (S. 25—26)

$$CS : CT = K\Lambda : KO = CT : KO,$$

das heißt $TZ = KO = RK$.

Der analytische Beweisgang wäre folgender: Wenn man unter Berücksichtigung von (10) und (11) [siehe S. 27] $u-x$ (also zum Beispiel $RK$) mit $\xi$ bezeichnet, ergibt sich für die Exparabel $EIRN$

$$\xi = y - \eta, \tag{16}$$

also gemäß (10)

$$\alpha\xi = a^2 - x^2 - \alpha\eta.$$

Nach (11) ist aber

$$a^2 - x^2 = \alpha\eta + \beta\eta^2,$$

so daß

$$\alpha\xi = \beta\eta^2 \tag{13}$$

folgt und sich der Inhalt der *lunula exparabolica* zu $\int_0^{\eta_0} \xi\, d\eta$ ergibt.

Die Parabel $CMH$ hat zunächst die Gleichung:

$$\eta^2 = \lambda\xi.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $CFL$ und $BHL$, das heißt aus

$$CF : CL = BH : BL,$$

folgt dann $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$; also ergibt sich für die Parabel $CMH$

$$\alpha\xi = \beta\eta^2, \tag{13}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Im Korollar 1 wird ein Quadraturhinweis für die Flächen $EBNRI$ und $IPKR$ unter Bezug auf das Korollar von III 12 samt der dort herangezogenen Archimedes-

---

[61] Die im Original wiedergegebene Abbildung 33 weist folgende Mängel auf: 1. $N$ müßte auf $EL$ liegen. 2. Der Punkt $T$ wäre besser so gewählt, daß die durch ihn gezogene Parallele zu $EF$ die Gerade $CA$ und die Parabel $CMH$ nicht in *einem* Punkt zu schneiden scheint. (Oder: $BA$ müßte wirklich gleich $BC$ sein.)

Stelle (siehe S. 28) gegeben. Überdies ist die Exparabel im Sinne von I 6 Scholium (siehe S. 9) einem Kegelschnitt gleichwertig (Kor. 2). —

Die im Zusammenhang mit dem Kegelschnittsystem eingeführte *Quadratrix* entsteht durch eine Ähnlichkeitstransformation. Gegeben sei (Abb. 38) ein Kegelschnittsystem und eine Gerade $HF$, *ex cuius positione quadratrix genita est.* Man zeichne durch einen beliebigen Punkt $N$ des *arcus* (der *falx*) *inferior* die Parallele $MNQ$ zur *diameter recta* $IH$ und die Parallele $NO$ zur Geraden $FH$; ferner ziehe man zur Berührungssehne $BC$ die Parallele durch $M$, die $ON$ in $L$ schneidet, so daß

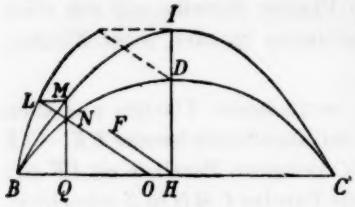

Abb. 38.

$$LN : NM = NO : NQ$$

ist. Dann ist $L$ ein Punkt der Quadratrix, deren Erzeugende $FH$ ist. Die Fläche zwischen Quadratrix, *arcus* (*falx*) *inferior* und der beziehungsweise den Parallelen zur erzeugenden Geraden heißt dann *lunula* (*cuspis*) *media.*

Die Quadratrix $BL$ (laufende Koordinaten $w; z$) kann folgendermaßen analytisch dargestellt werden: Ist

$$\alpha y = a^2 - x^2 \tag{10}$$

die Gleichung der Parabel $BIC$,

$$\alpha\eta + \beta\eta^2 = a^2 - x^2 \tag{11}$$

die der Ellipse $BDC$, und setzt man

$$k = \operatorname{ctg} \varphi, \tag{17}$$

wobei $\varphi = \sphericalangle BHF$ den Winkel zwischen der Berührungssehne und der Erzeugenden darstellt, so erhält man nach (10), (11), (13) und (17) für die Quadratrix $BL$

$$w = x + k(y - \eta) = x + \frac{k\beta\eta^2}{\alpha}, \tag{18}$$

$$z = y \qquad = \eta + \frac{\beta\eta^2}{\alpha}, \tag{19}$$

das heißt $w; z$ hängen rational von $x; \eta$ ab. Umgekehrt folgt aus (10) und (18)

$$x^2 = a^2 - \alpha y = (w - ky + k\eta)^2 = (w - ky)^2 + 2k\eta(w - ky) + k^2\eta^2,$$

was vermittels (10), (11) und (19) zu

$$a^2 - \alpha z = (w - kz)^2 + 2k\eta(w - kz) + k^2\frac{\alpha z - \alpha\eta}{\beta}$$

und hieraus zu

$$\eta\left[2k(w - kz) - \frac{k^2\alpha}{\beta}\right] = a^2 - \alpha z - (w - kz)^2 - \frac{k^2\alpha z}{\beta}$$

führt. So ergibt sich schließlich:

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{a^2\beta - \alpha z(\beta + k^2) - \beta(w - kz)^2}{2k\beta(w - kz) - k^2\alpha} \\ x = w - kz + \dfrac{a^2\beta - \alpha z(\beta + k^2) - \beta(w - kz)^2}{2\beta(w - kz) - k\alpha}. \end{cases}$$

Damit ist gezeigt, daß auch $x; \eta$ rational von $w; z$ abhängen: die Quadratrix $(w; z)$ ist — ebenso wie die Exparabel $(u; v)$, siehe S. 27 — birational auf die Ellipse $(x; \eta)$ bezogen.

Daß auch die Quadratrix eine rationale Kurve ist, erkennt man am einfachsten aus einer rationalen Parameterdarstellung, die man aus

$$\eta(\alpha+\beta\eta)=(a+x)(a-x) \tag{11}$$

in der Form

$$\frac{a-x}{\eta}=\frac{\alpha+\beta\eta}{a+x}=t$$

gewinnt. Hieraus resultiert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+t\eta=a, \\ tx-\beta\eta=\alpha-at \end{cases}$$

mit den Lösungen:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a(\beta-t^2)+\alpha t}{\beta+t^2}, \\ \eta=\dfrac{2at-\alpha}{\beta+t^2}. \end{cases}$$

Damit ist die Ellipse $(x;\eta)$ rational in $t$ dargestellt, also gemäß (18) und (19) auch die Quadratrix $(w;z)$, die somit eine rationale Kurve darstellt. —

Während Lalouvère in III 10 einfache Symmetriebeziehungen an Kegelschnittsystemen aufstellt, erzeugt er in III 11 eine Quadratrix aus der Haupttangente (siehe S. 27): Es sei (Abb. 39) $BNC$ zum Beispiel die Ellipse, $BIC$ die Parabel, $BMDC$ die Quadratrix, die die Tangente $AC$ zur Erzeugenden hat, $G\Lambda$ die Parallele zu $AC$ durch das *centrum systematis* $G$. Dann gilt für einen beliebigen Punkt $O$ auf $BC$

$$C\Lambda:CO=LN:DN,$$

wobei $L$, $N$, $D$ die Schnittpunkte der durch $O$ zu $AC$ gezogenen Parallelen mit der Tangente $AB$, der Ellipse und der Quadratrix sind.

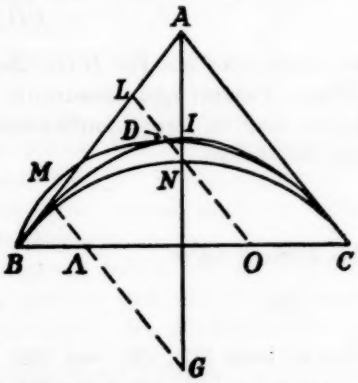

Abb. 39 (Entspr. Quadr. circ. S. 264).

Während im Korollar 1 untersucht wird, welchen Einfluß die Lage des Punktes $O$ (je nachdem ob auf $B\Lambda$, in $\Lambda$, auf $AC$ gelegen) auf den Wert des Verhältnisses $LN:DN$ ausübt, folgert Lalouvère im Korollar 2 die Gleichheit der *lunulae* $BNCI$ und $BNCDM$.

Das ist analytisch sofort einzusehen: Mit den Bezeichnungen der vorigen Seite ergibt sich als Flächeninhalt der *lunula* $BNCI$

$$F_1=\int_{-a}^{+a}(y-\eta)\,dx,$$

als Flächeninhalt der *lunula* $BNCDM$

$$F_2=\int_{-a}^{+a}(z-\eta)\,dx;$$

nach (19) ist $z=y$.

Es verbleiben noch die Sätze III 14 bis 20; die in ihnen enthaltenen Integrationen hängen folgendermaßen zusammen: In III 14 wird die *lunula media* einer Quadratrix ermittelt, deren Erzeugende einen Winkel von 45° mit der Berührungssehne bildet; in III 15 wird die Quadratur für einen beliebigen Winkel durchgeführt. Von III 16 an

wird die Quadratrix aus der Haupttangente erzeugt (wie in III 11), und zwar handelt es sich in III 16 um einen Streifen aus der *lunula* zwischen Quadratrix und Ellipse, in III 17 um ein Ellipsensegment und in III 18 bis 20 um Kreissegmente sowie bestimmte Hyperbel- und Parabelsegmente.

III 14: Wenn die Erzeugende einer Quadratrix den Winkel zwischen Berührungssehne und *diameter recta* halbiert (Abb. 40), ist die *lunula media BMGDE* gleich der Summe von *lunula parabolica BMGCN* und *lunula exparabolica BMGFI*. Das Korollar behandelt Ausschnitte dieser Flächen.

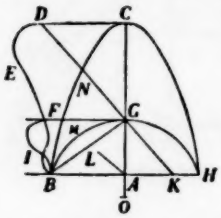


Abb. 40 (Quadr. circ. S. 278).

*Beweis.* Führt man unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen gemäß (16) die Zwischenordinate $\xi = y - \eta$ ein, so ist die Fläche der Exparabel *BMGFI*

$$E = \int_0^{\eta_0} \xi \, d\eta; \tag{20}$$

dabei ist $\eta_0$ die Ordinate von $G$. Die Fläche *BNCDEF* zwischen Quadratrix *DEB* und Parabel *CNB* hat den Inhalt

$$Q = \int_0^{y_0} \xi \, dy, \tag{21}$$

wobei $y_0$ die Ordinate von $C$ darstellt. Denn gemäß der Definition der Exparabel (Seite 27) und unter Berücksichtigung dessen, daß $AK = AG$, also

$$CD = CG \, (= y_0 - \eta_0 = \xi_0)$$

ist, stellt nicht nur *FGCD* ein Quadrat dar, sondern läßt sich stets zwischen Exparabel, Ellipse, Parabel und Quadratrix ein Quadrat beschreiben, dessen Seiten die Länge $\xi$ haben und zu den Koordinatenachsen parallel sind. Die *lunula parabolica BMGCN* hat den Inhalt

$$P = \int_0^a (y - \eta) \, dx,$$

das Dreieck *GCD*

$$\Delta = \frac{1}{2} \xi_0^2 = \int_0^{\xi_0} \xi \, d\xi. \tag{22}$$

Nun ist nach (21), (20) und (22)

$$Q = \int_0^{y_0} \xi \, dy = \int_0^{\eta_0} \xi \, d\eta + \int_0^{\xi_0} \xi \, d\xi = E + \Delta; \tag{23}$$

andererseits ist

$$M + \Delta = P + Q, \tag{24}$$

wenn $M$ den Inhalt der gesuchten *lunula media BMGDE* bedeutet. Aus (23) und (24) folgt die Behauptung

$$M = P + E. \tag{25}$$

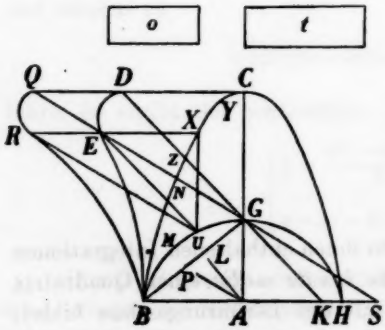


Abb. 41 (Quadr. circ. S. 281).

In III 15 (Abb. 41) zeichnet Lalouvère eine weitere Quadratrix *QRB* mit einer beliebigen Erzeugenden *AP* und führt die Quadratur von deren *lunula media BMGQR* auf die von III 14

zurück, indem er zeigt: Es ist

$$BMGQR = BMGCN + t$$

mit

$$t : o = AS : AK,$$

wobei $o = BMGFI$ (Abb. 40) ist. Das Korollar behandelt eine Ausschnittsquadratur.

Lalouvère behauptet also im Sinne der Bezeichnungen von III 14:

$$Q = P + \frac{AS}{AK} \cdot E = P + k \cdot E.$$

Nach (17) auf Seite 30 ist

$$AS : AK = AS : AG = \operatorname{ctg} \varphi = k$$

und nach der Definition der Quadratrix (S. 30) auch

$$CQ : CG = AS : AG = k.$$

In III 16 ist die Haupttangente oder eine Gerade, die steiler ist als die Haupttangente, Erzeugende der Quadratrix. Verbindet man zwei symmetrisch zum Ellipsenscheitel gelegene Punkte der Ellipse miteinander und zieht durch diese Punkte Parallelen zur Erzeugenden bis an die Quadratrix und zur *diameter recta* (siehe S. 27) bis an die Parabel, so sind die durch die Kurven, die Parallelen und die gemeinsame Sehne begrenzten Flächen einander gleich. Dies folgt sofort aus III 11 Korollar 2 (S. 31). Im Scholium wird die beschriebene Einschränkung in der Wahl der Erzeugenden darauf zurückgeführt, daß sie den *arcus inferior* in nur *einem* Punkte schneiden.

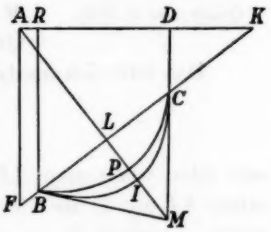

Abb. 42
(Entspr. Quadr. circ. S. 291).

In III 17 quadriert Lalouvère ein Ellipsen- (beziehungsweise Hyperbel-)Segment (Abb. 42). Dabei ist $A$ Mittelpunkt der Ellipse, deren Bogen $BPC$ zwischen eine Tangente $CD$ und ihre Parallele $BR$ gehängt ist. Man ziehe in $B$ die Tangente $BM$ und vervollständige das Kegelschnittsystem durch die Parabel $BIC$[62]. Lalouvère zeigt, daß das Ellipsensegment $BPCL$ mit der Differenz zweier Größen gemäß II 12 Korollar 2 (S. 21) ins Gleichgewicht gebracht werden kann.

Das erkennt man folgendermaßen: Mit dem Ursprung $L$, der Abszissenachse $BC$ und der Ordinatenachse $LM$ ergibt sich das halbe Ellipsensegment $BPL$ zu $\int_0^a \eta\, dx$, wenn die Ellipse gemäß (11) [S. 27] durch

$$\alpha\eta + \beta\eta^2 = a^2 - x^2$$

gegeben und $LB = LC = a$ ist. Nun hat der Tangentenschnittpunkt $M$ die Ordinate $\frac{2a^2}{\alpha}$, also $I$, der Scheitel der Parabel $BIC$ mit der Gleichung

$$\alpha y = a^2 - x^2, \tag{10}$$

die Ordinate $y_0 = \frac{a^2}{\alpha}$, so daß sich das halbe Parabelsegment $BIL$ als $\frac{2}{3} a y_0$ ergibt. Es ist das Ellipsensegment gleich der Differenz aus Parabelsegment und *lunula parabolica* $P$, also folgt mit den Bezeichnungen von Seite 32, insbesondere gemäß (25),

$$\int_0^a \eta\, dx = \frac{2 a y_0}{3} - P = \frac{2 a y_0}{3} - (M - E). \tag{26}$$

[62] Bei Lalouvère ist statt der Parabel die Quadratrix mit der Haupttangente $CM$ als Erzeugender gezeichnet, doch ist für unseren Beweisgang die Umzeichnung von Vorteil.

Nach III 13 (S. 29) ist die Fläche der (in Abb. 42) nicht gezeichneten Exparabel $E$ durch eine Parabelquadratur darstellbar, und zwar ergibt sich

$$E = \frac{1}{3}\eta_0(y_0 - \eta_0), \tag{27}$$

wobei $\eta_0$ die Ordinate von $P$ ist. Aus (26) und (27) folgt:

$$\int_0^a \eta\, dx = \frac{1}{3}[2ay_0 + \eta_0(y_0 - \eta_0)] - M.$$

In dieser Differenz ergibt sich der Minuend aus bekannten Parabelquadraturen, und der Subtrahend stellt eine *lunula media* dar, so daß die Quadratrix tatsächlich die Quadratur des Ellipsensegments bewirkt. —

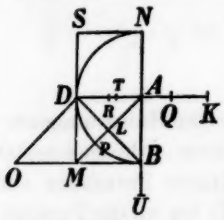

Abb. 43 (Entspr. Quadr. circ. S. 300).

Die folgenden Sätze führen nun zur Kreisquadratur.

In III 18 ist (Abb. 43) ein Halbkreis $NDB$ mit dem Mittelpunkt $A$ des zugehörigen Vollkreises und $MBNS$ das umbeschriebene Rechteck. $A$ sei Drehpunkt der Waage und $AK = AD$. Dann wird dem Kreisquadranten $DPBA$ durch diejenige in $K$ hängende Fläche das Gleichgewicht gehalten, die gleich zwei Dritteln des Dreiecks $DBA$ oder gleich einem Drittel des Quadrats $MBAD$ ist. (Dem Halbkreis $NDBA$ wird durch zwei Drittel des Quadrats $MBAD$ das Gleichgewicht gehalten.)

Das läßt sich analytisch folgendermaßen zeigen: Es soll

$$DPBA \cdot AT = MBAD \cdot AK$$

sein oder, wenn man $AD$ zur $x$-Achse, $AN$ zur $y$-Achse macht, die Schwerpunktsabszisse $AT$ mit $\xi$, die Viertelkreisfläche $DPBA$ mit $F$ bezeichnet und $AD = AB = AK = r$ setzt,

$$F \cdot \xi = \frac{1}{3} r^3.$$

Ist nämlich $y^2 = r^2 - x^2$, so ergibt sich als Moment hinsichtlich der $y$-Achse:

$$F \cdot \xi = \frac{1}{2}\int_0^r y^2 dx = \frac{1}{3} r^3 = r \cdot \frac{1}{3} r^2.$$

Im Lemma wird $DPB$ als Parabel mit dem Durchmesser $LM$ und den Tangenten $MD$, $MB$ angesehen. Hier behauptet Lalouvère, daß das Parabelsegment $DPBL$ zwei Drittel des Dreiecks $MBD$ darstellt[63]. Wählt man $MA$ zur $x$-Achse und die Parallele zu $BD$ durch $P$ zur $y$-Achse eines rechtwinkligen cartesischen Systems, so hat, wenn die Parabel durch

$$y^2 = 2px$$

gegeben wird, der Berührungspunkt $D$ die Koordinaten $\left(\frac{1}{2}p;\, p\right)$, da ja $\sphericalangle DML = 45°$ betragen soll. Dann ergibt sich für die Parabelfläche $PLD$ wegen $y\,dy = p\,dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}p} y\, dx = \int_0^p \frac{y^2 dy}{p} = \frac{p^3}{3},$$

und für das Dreieck $MLD$ erhält man $\frac{1}{2}p^2$, woraus die Behauptung folgt.

---

[63] Vergleiche Archimedes[22]: *Quadratura parabolae* 16.

Im Korollar 2 stellt $BPD$ einen halben Hyperbelzweig mit dem Scheitel $B$ und dem Hyperbelmittelpunkt $U$ dar, wobei $BU = \frac{1}{2} BA = a$ sein soll. Dann wird behauptet:

$$DPBA \cdot AT = AK \cdot \frac{5}{24} DA^2,$$

das heißt

$$F \cdot \eta = \frac{5}{3} a^3.$$

Wählt man hier $BA$ als $x$-Achse und $BD$ als $y$-Achse des Koordinatensystems, so lautet wegen $D \triangleq (2a;\ 2a)$ die Hyperbelgleichung:

$$y^2 = ax + \frac{1}{2} x^2.$$

Nun ist aber

$$F \cdot \eta = \int_0^{2a} \left(ax + \frac{1}{2} x^2\right) dx = \frac{5}{3} a^3 = a \cdot \frac{5}{3} a^2 = 2a \cdot \frac{5}{24} (2a)^2,$$

wie behauptet.

Korollar 1. Wenn der Punkt $K$, also der Kraftarm $AK = a$, beliebig gewählt ist, stehen die Kräfte $K_1$ und $K_2$, die dem Halbkreis $NDB = F_1$ und dem Rechteck $MBNS = F_2$ das Gleichgewicht halten, im Verhältnis 2:3.

*Beweis.* Es ist

$$K_1 \cdot a = F_1 \cdot \xi = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2r^3}{3},$$

$$K_2 \cdot a = F_2 \cdot AR = 2r^2 \cdot \frac{1}{2} r = r^3,$$

somit

$$K_1 : K_2 = 2 : 3.$$

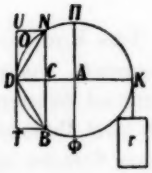

Abb. 44 (Entspr. Quadr. circ. S. 305).

In III 19 lehrt Lalouvère, daß (Abb. 44) ein Kreisabschnitt $NODBC$ mit dem Bogen $\frac{2\pi}{3}$ der Hälfte des Rechtecks $TBNU$ das Gleichgewicht hält, wobei $BN$ die Sehne und $NU = CD$ der Durchmesser des Kreisabschnittes sind. Der Kreisdurchmesser $DK$ ist Waagebalken mit dem Mittelpunkt $A$ als Drehpunkt. Der Kreisabschnitt befindet sich mit einer zum Waagebalken senkrechten Sehne am einen Ende des Kreises, und die Fläche $r = \frac{1}{2} TBNU$ hängt am entgegengesetzten Endpunkt des Kreisdurchmessers.

Das zeigt man folgendermaßen: Es sei $DA$ die $x$-Achse, $DN$ die $y$-Achse und somit

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Dann ist

$$F \cdot \xi = \int_0^{x_0} (a - x)\, y\, dx = \int_0^{y_0} y^2 dy = \frac{y_0^3}{3} = a \cdot \frac{y_0^3}{3a} = a \cdot \frac{x_0 y_0}{2},$$

wenn man

$$x_0 = DC = \frac{1}{2} a$$

und demgemäß

$$y_0 = CN = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$$

setzt.

Gemäß Korollar 1 soll das Dikeratoid[64] *TBDONU* durch $\frac{1}{4}$ *TBNU* im Gleichgewicht gehalten werden; analytisch:

$$F\cdot\xi = \int_0^{x_0} [y_0-(a-x)]\, y dx = \int_0^{y_0} (y_0 y - y^2) dy = \frac{y_0^3}{6} = a\cdot\frac{y_0}{6a} = a\cdot\frac{x_0 y_0}{4}.$$

Im Korollar 2 steht, daß der Fläche

*BΦΠN* (= Halbkreis minus Kreisabschnitt)

durch die Differenz

$$\frac{2a^2}{3} - x_0 y_0$$

das Gleichgewicht gehalten wird, wobei die „Kräfte" aus III 18 und III 19 bekannt sind. Das ersieht man für die halbe Fläche aus

$$F\cdot\xi = \int_{x_0}^{a} (a-x)\, y dx = \int_{y_0}^{a} y^2 dy = \frac{a^3}{3} - \frac{y_0^3}{3} = a\left(\frac{a^2}{3} - \frac{y_0^2}{3a}\right) = a\left(\frac{a^2}{3} - \frac{x_0 y_0}{2}\right).$$

Schließlich gibt der letzte Satz des Buches, III 20, unter den Voraussetzungen von III 18 (siehe S. 34) die Proportion:

$$\textit{Volle Kreisfläche}: \frac{1}{3} DK^2 = AK : AT,$$

wobei $T$ der Schwerpunkt des Halbkreises *BDN* ist (Abb. 43), so daß behauptet wird:

$$K : \frac{4}{3} r^2 = r : \xi.$$

*Beweis.* Es ist

$$K\cdot\xi = \int_0^{2r} (2rx - x^2) dx = \frac{4}{3} r^3 = r\cdot\frac{4}{3} r^2.$$

Das Korollar 1 entspricht dem Korollar 2 von III 18 (S. 35) (*DPBA* = Hyperbelsegment), wogegen das Korollar 2 abschließend feststellt, daß bisher keine anderen Hilfsmittel benutzt wurden, als sie auch Euklid verwendet: Es wurde nur gefordert, durch zwei Punkte eine Gerade zu ziehen und um einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Strecke einen Kreis zu schlagen.

Im übrigen greift Lalouvère, wie schon im Vorwort *Ad lectorem* (siehe S. 4) erwähnt, die Quadratur von Kreis- und Hyperbelsegmenten in V 2 und V 3 wieder auf, während das Buch IV Drehkörpern gewidmet ist. —

Folgendes sei aus Buch III als von besonderem mathematischen Interesse genannt:

1. Das auf der Doppelberührung von Kegelschnitten (III 4, S. 25—26) beruhende *systema nota methodo descriptum* (III 8 und 9, S. 26—27) mit den anschließenden Begriffsbildungen, insbesondere:

2. Die Exparabel (S. 27—28), deren *lunula* wie eine Parabelfläche quadrierbar ist (III 13, S. 29).

3. Die Quadratrix (III 11, S. 30—31) und ihre Verwendung zur Quadratur eines Ellipsen- und Hyperbelsegments (III 14 bis 17, S. 31—34).

4. Die Quadraturen in III 18 bis 20 (S. 34—36). —

---

[64] Unter „Dikeratoid" versteht Lalouvère eine Fläche, die durch einen Kegelschnittbogen, seine Scheiteltangente und zwei Parallelen zu dem zugehörigen Durchmesser begrenzt wird.

Im ganzen sind Lalouvère bisher folgende Kreis- und Hyperbelquadraturen gelungen:

a) Beim Kreis: Quadrant und Halbkreis (III 18), Segment eines Drittelkreises (III 19), volle Kreisfläche (III 20);

b) bei einer Hyperbel, deren Parameter $2p = a$ ist: Segment von der Breite $2a$ (III 18 Kor. 2, III 20 Kor. 1).

Lalouvère kommt zum Ziel, indem er die Schwerpunkte als gegeben annimmt. Im Gegensatz zu den unbekümmerten „Integrationen" vieler Zeitgenossen bedient sich Lalouvère dabei des dem Archimedes entlehnten strengen Exhaustionsverfahrens und benutzt unter Zuhilfenahme des Schwerpunktssatzes

$$\int_0^a xydx = \xi \int_0^a ydx$$

das Hebelgesetz zur Quadratur krummlinig begrenzter Flächen. (Vergleiche auch die Bemerkungen zu II 5, S. 17).

## § 7. Buch IV.

Hier behandelt Lalouvère in dreißig Sätzen Schwerpunkte und Größenverhältnisse an Drehkörpern. Eine kurze Vorrede weist auf den Zusammenhang mit Buch III hin, ferner (außer auf Archimedes) auf den *Almagest* (*Μεγάλη σύνταξις*) des Ptolemaios[65]. Wie im Weltall, so seien auch bei der Kreisquadratur Zahl und Gewicht die maßgebenden Werkzeuge.

Man kann auch dieses Buch in drei Abschnitte unterteilen: Die Sätze 1 bis 10 behandeln Verhältnisse an (ebenen) Kegelschnitten; in den Sätzen 11 bis 20 handelt es sich um Drehkörper auf der Grundlage von Kegelschnitten; dann folgen in IV 21 bis 27 besondere Körper schwierigerer Entstehungsweise; die letzten drei Sätze bilden ein für die gestellte Aufgabe nicht notwendiges Anhängsel.

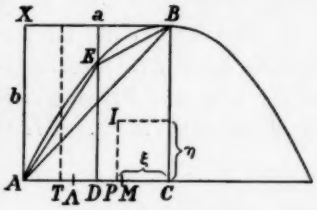

Abb. 45
(Entspr. Quadr. circ. S. 318).

In IV 1 wird (Abb. 45) der Schwerpunkt $I$ des Halbparabelsegments $ACBE$ bestimmt, und zwar die „Abszisse" $AP$ im Satz selbst:

$$DP : PM = \triangle ACB : \tfrac{4}{3} \triangle ABE,$$

wobei $AD = DC$ und $AM = 2MC$ ist; die „Ordinate" $PI = \frac{2}{5} CB$ im Korollar 5. Dazu die Schwerpunktsabszissen folgender Flächen:

1. der Restfläche („Semidikeratoid"[64]) $AEBX$ durch

$$AT : TC = 1 : 3$$

(Kor. 2 und 4);

2. des Segments $ADE$ durch

$$A\Lambda : \Lambda D = 39 : 21$$

(Kor. 7).

Lalouvère teilt ferner mit, daß die Schwerpunktsabszisse des Parabelstreifens $DCBE$ durch Vereinigen eines Rechtecks mit einem Halbsegment ermittelt wird (Kor. 1); ferner folgt aus

$$AD : DC < AP : PC < AM : MC$$

[65] *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia* ed. J. L. Heiberg, Band I: Syntaxis. Leipzig 1898.

die Beziehung

$$1 < AP : PC < 2$$

(Kor. 3), und es ist

$$AP : PC = 5 : 3$$

(Kor. 4), wobei diese Proportion für alle über derselben Sehne errichteten Parabelsegmente mit zu $CB$ parallelem Durchmesser gilt (Kor. 6).

Die Beweise benutzen bekannte Sätze aus Archimedes' Schriften *Quadratura parabolae*[23] und *De aequiponderantibus*[22] und aus Apollonios' *Conica*[21].

Lalouvères Ergebnisse leiten wir heute leicht aus der Parabelgleichung

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}$$

mittels der Beziehungen

$$\xi \int_0^a y\,dx = \int_0^a x\,y\,dx$$

und

$$\eta \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{y^2 dx}{2}$$

her.

In IV 2 hat die Parabel $BG$ (Abb. 46) den Scheitel $B$, die Scheiteltangente $BF$ und die Achse $BL$. $G$ sei die vierte Ecke des Parallelogramms $LGFB$, und es mögen durch die beliebig auf $BF$ gelegenen Punkte $C$ und $I$ die Parallelen zu $BL$ gezogen werden, die die Parabel in $E$ und $H$ und die Gerade $BG$ in $D$ und $K$ schneiden. Dann gilt:

$$CE : IH = CD^2 : IK^2.$$

Zieht man durch $E$ und $H$ auch die Parallelen zu $BF$, so gilt (Kor.)

$$NP : OQ = NE^2 : OH^2.$$

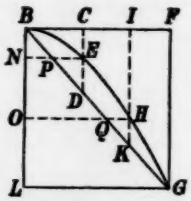


Abb. 46 (Entspr. Quadr. circ. S. 327).

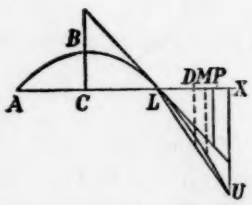


Abb. 47 (Entspr. Quadr. circ. S. 329).

In IV 3 habe das Parabelsegment $ABL$ (Abb. 47) die Achse $CB$ und die Sehne $AL$; diese werde über $L$ hinaus bis zu einem beliebigen Punkte $X$ verlängert, und es werde $XU$ parallel zu $BC$ gezogen. Dann ist die Schwerpunktsabszisse $LP$ des Parabelsegments $LUX$ durch

$$AM : MX = DM : MP$$

bestimmt, wobei $LD = DX$ und

$$LM : MX = 2 : 1$$

ist. Dabei teilt $P$ die Strecke $LX$ so, daß

$$2 < LP : PX < 3$$

ist (Kor. 1). Wählt man $LX = AL$, so wird

$$LP : PX = 7 : 3$$

(Kor. 2). Alle Parabeln mit gleicher Sehne $AL$ und gleichem Abstand $LX$ haben bezüglich des Segments $LUX$ dieselbe Schwerpunktsabszisse (Kor. 3). —

Die nächsten beiden Sätze haben die Hyperbel zum Gegenstand.

In IV 4 seien $D$ und $K$ die Scheitelpunkte einer Hyperbel (Abb. 48) und $A$ der Schnittpunkt ihrer Asymptoten. Wenn dann zu einer von ihnen, etwa $OAC$, durch $D$ und einen beliebigen Punkt $F$ der Hyperbel die Parallelen gezogen werden, die die andere Asymptote $NAB$ in $U$ und $E$ schneiden, so ist

$$AE \cdot EF = AU^2.$$

Daß auch umgekehrt aus obiger Beziehung und aus der Parallelität von $EF$ und $AC$ folgt, daß $F$ auf einer Hyperbel liegt, steht im Korollar.

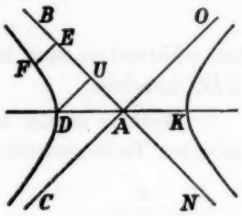

Abb. 48
(Entspr. Quadr. circ. S. 334).

In IV 5 zeigt Lalouvère, wie man bei gegebenen Asymptoten eine Hyperbel zeichnen kann, wenn der Inhalt des „Bestimmungsparallelogramms" $AEF$ gegeben ist.

In IV 6 und IV 7 wird — modern gesprochen — die Gleichung dritten Grades

$$x^3 - 2bx^2 + b^2x - ac^2 = 0$$

durch den Schnitt der Parabel

$$y^2 = ax$$

und der Hyperbel

$$(x-b)\,y = ac$$

gelöst; es ergibt sich nämlich

$$ax = \frac{a^2c^2}{(x-b)^2}$$

und daraus

$$\frac{x}{a} = \frac{c^2}{(x-b)^2}.$$

Dabei werden jeweils nur die Schnittpunkte mit dem einen Hyperbelast betrachtet, so daß sich einmal zwei Schnittpunkte, einmal einer ergeben.

In den Sätzen IV 8 bis 10 handelt es sich um Parabelsegmente.

In IV 8 ist $AED$ (Abb. 49) die unterhalb der durch

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

gegebenen Parabel $AD$ gelegene Fläche; hierbei soll

$$AE = ED = 2p$$

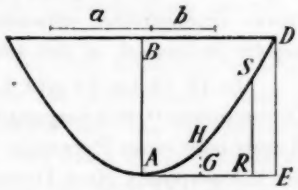

Abb. 49.
(Entspr. Quadr. circ. S. 345).

sein und die Fläche $AED$ durch die Parallele $RS$ zu $AB$ nach einem gegebenen Verhältnis $a:b$ geteilt werden. Gibt man $R$ die Abszisse $\xi$, so handelt es sich also um die Aufgabe, $\xi$ aus

$$\int_0^{\xi} \frac{x^2\,dx}{2p} : \int_{\xi}^{2p} \frac{x^2\,dx}{2p} = a:b$$

zu bestimmen. Man erhält

$$\xi = 2p\sqrt[3]{\frac{a}{a+b}}.$$

Im Korollar wird diese Teilung auf einen „Streifen" *GEDH* übertragen.

In IV 9 samt Korollar (Abb. 50) wird die gleiche Aufgabe für das Parabelsegment *AEΠ* selbst unter der Bedingung gelöst, daß

$$\Phi\Pi = \frac{1}{2}\Phi E = \frac{1}{2}p$$

ist, während es sich in IV 10 und Korollar um dieselbe Aufgabe für das Flächenstück *EDQ* handelt.

Wichtig ist der am Schluß von IV 8 gegebene Hinweis, daß die in IV 8 bis 10 niedergelegten Teilungsmethoden später Verwendung finden werden bei der Teilung der Rauminhalte folgender Drehkörper nach einem gegebenen Verhältnis: Kegelstumpf, Abschnitte von Kugel, Drehellipsoid und zweischaligem Drehhyperboloid.

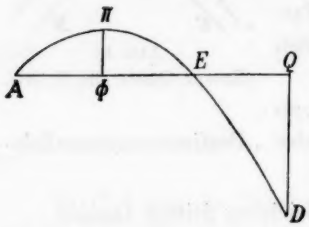


Abb. 50
(Entspr. Quadr. circ. S. 357).

IV 11 bringt das gewöhnlich nach Cavalieri[66] benannte Prinzip der Körpervergleichung, siehe S. 5 und § 9. Lalouvère fügt, was für seine Zwecke wichtig ist, hinzu, daß die Schwerpunkte der verglichenen Körper im gleichen Abstande von der Grundfläche liegen. Das Korollar verallgemeinert das Prinzip für den Fall verhältnisgleicher Grundflächen und Querschnitte. Lalouvère diskutiert bei dieser Gelegenheit die von Zenon[67] erwähnten „Indivisibeln" Demokrits mit der Auffassung, wonach das Kontinuum aus „Divisibeln" zusammengesetzt ist, und führt zum Vergleich den Fall ebener Figuren an. Auch wird darauf hingewiesen, daß das Prinzip für gewisse einfache Körper (Zylinder, Kegel, Prisma, Pyramide, Spat) bereits durch Euklid[20] (Elemente XI und XII) und Clavius[29] bewiesen sei. Daß die Schwerpunkte in derselben zur Grundfläche parallelen Ebene liegen, habe für einige einfache Körper schon Commandino[54] gezeigt.

Bemerkt sei noch, daß, wie Cavalieri sein Prinzip nicht eigentlich beweist, ja das Indivisibel nicht einmal streng und klar definiert[66], auch Lalouvère für IV 11 keinen mathematischen Beweis im engeren Sinne gibt, sondern eine philosophische Begründung, in der er die Sache selbst erklärt und dann sagt[68]: *Quod quis probet aliter quam nuda rei ipsius explanatione, adiuncta aliorum omnium mira convenientia, sicuti a nobis in hoc negotio factum est, ut fiet amplius.*

In IV 12 bis 15 gibt Lalouvère unter häufiger Bezugnahme auf Archimedes[19] und Commandino[54] Schwerpunktsbestimmungen von Drehkörpern: Der Schwerpunkt eines Kegels oder einer Pyramide teilt die Achse von der Spitze aus im Verhältnis 3:1 (IV 12), der Schwerpunkt eines Drehparaboloids dessen Achse vom Scheitel aus wie 2:1 (IV 13), der Schwerpunkt einer Halbkugel oder eines halben Drehellipsoids deren Achse vom Scheitel aus wie 5:3 (IV 14); der Schwerpunkt der einen Schale eines zweischaligen Drehhyperboloids schließlich teilt die Achse vom Scheitel aus im Verhältnis 7:3, sofern die Höhe der Schale gleich der *diameter transversa* der erzeugenden Hyperbel ist (IV 15).

[66] Vergleiche H. Wieleitner: *Geschichte der Mathematik* II 1. Leipzig 1911, S. 107ff.

[67] H. Hasse-H. Scholz: *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik.* Neudruck Leipzig 1940, S. 10–12.

[68] *Quadr. circ.* S. 362, Zeile 5–9 von oben.

Es handelt sich also, modern gesprochen, um folgende Integrale:

IV 12:
$$\xi = \frac{\int_0^a a^2 x^2 dx}{\int_0^a a^2 x^2 dx} = \frac{3}{4} a$$

(erzeugende Gerade $y = ax$).

IV 13:
$$\xi = \frac{\int_0^a a x^2 dx}{\int_0^a a x dx} = \frac{2}{3} a$$

(erzeugende Parabel $y^2 = ax$).

IV 14:
$$\xi = \frac{\int_0^a (2a x^2 - x^3) dx}{\int_0^a (2a x - x^2) dx} = \frac{5}{8} a$$

$\left(\text{erzeugende Ellipse } y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2\right)$.

IV 15:
$$\xi = \frac{\int_0^{2a} (2a x^2 + x^3) dx}{\int_0^{2a} (2a x + x^2) dx} = \frac{7}{5} a$$

$\left(\text{erzeugende Hyperbel } y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2\right)$.

Lalouvères Beweisverfahren ist von dem modernen ebenso verschieden wie von dem seiner Vorgänger. Es werde an Hand des Satzes IV 12 kurz dargelegt: Lalouvère ergänzt den Achsenschnitt $BCA$ (Abb. 51) des Kegels zum Parallelogramm $BCAD$ und schreibt diesem die Parabel $AMB$ mit dem Scheitel $A$, der Scheiteltangente $AC$ und dem Durchmesser $AD$ ein, so daß gemäß IV 2 (S. 38)

$$SK^2 : HI^2 = LK : MI$$

folgt. Nun lassen sich jedoch in zur Grundfläche $BOC$ parallelen Ebenen die Rechtecke $LKER$ und $MIFG$ so finden, daß

$$SK^2 : HI^2 = LKER : MIFG$$

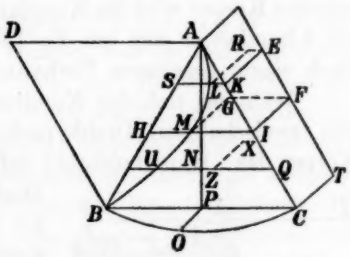

Abb. 51 (Entspr. Quadr. circ. 367).

und somit $KE = IF$ ist. Damit läßt sich durch $RE$ und $GF$ eine zu $ABC$ parallele Ebene legen. Führt man nun die auf $ABC$ senkrecht stehende Strecke $LR$ längs der Parabel $AMB$ entlang, so entsteht ein als „Prismatoid" bezeichneter Körper, der das Semidikeratoid[64] $BCAM$ zur Grundfläche hat. Die Seitenflächen des Prismatoids sind einmal die beschriebene Zylinderfläche und dann die Rechtecke aus $AC$ und $KE$ sowie aus $BC$ und $CT$, wobei $CT = KE$ ist. Nun hat nach IV 1 Korollar 4 (S. 38) das Semidikeratoid $BCAM$ den Schwerpunkt $Z$ auf der Parallelen $UQ$[69] zu $BC$ durch $Q$, wobei

$$AQ : QC = 3 : 1$$

ist. Wenn $ZX$ parallel zu $IF$ verläuft, sind auch die Ebenen $UZX$ und $MIF$, das heißt $UZX$ und $BOC$, parallel. Also liegen Achse und damit auch Schwerpunkt des Prismatoids

[69] $Z$ ist Mittelpunkt von $UQ$.

in der durch $UQ$ gehenden, zu $BOC$ parallelen Ebene. Nach IV 11 (S. 40) sind Prismatoid und gegebener Kegel raumgleich und haben ihre Schwerpunkte im selben Abstand von der Grundfläche $BOC$. Also liegt der Schwerpunkt des Kegels in der durch $UQ$ gehenden, zu $BOC$ parallelen Ebene; andererseits liegt der Schwerpunkt des Kegels auf seiner Achse $AP$, das heißt $N$ ist Schwerpunkt des Kegels. Nun folgt aber

$$AN:NP = AQ:QC = 3:1,$$

womit der Beweis erbracht ist. —

Von den Korollaren des Satzes IV 12 wird im Korollar 1 der Schwerpunkt des Pyramidenstumpfes behandelt. Im Korollar 2 definiert Lalouvère einen Körper, den er *Homoeoconicum* (sc. *solidum*) nennt; dieser ist so beschaffen, daß seine Querschnitte denen eines Kegels flächengleich und untereinander ähnlich sind; ein solches Verfahren der Erzeugung „schnittgleicher Körper" wird noch mehrfach verwendet. Korollar 4 handelt von der Teilung von Kegel und *Homoeoconicum* nach einem gegebenen Verhältnis. In Korollar 3 und Korollar 5 handelt es sich um Körper, die über einem Dikeratoid[64] errichtet wurden. Im Scholium steht, warum Archimedes[19] wohl die Rotation der Drehkörper nicht um die Achse, sondern um einen Durchmesser vornimmt.

Im Korollar 1 des Satzes IV 13 wird der Schwerpunkt des Paraboloidstumpfes ermittelt. Im Korollar 2 führt Lalouvère für einen dem Drehparaboloid schnittgleichen Körper die Bezeichnung „Parabolikoid" ein. Während im Korollar 3 das Paraboloid mit einem Prisma verglichen wird, steht im Korollar 4, daß sich die Paraboloidabschnitte wie die Quadrate der zugehörigen Höhen verhalten[70]. In Korollar 5 wird ein Drehparaboloid nach einem gegebenen Verhältnis geteilt. Das Scholium von IV 13 gibt naturwissenschaftliche Anwendungen der im Satz selbst behandelten Formen.

Von den Korollaren des Satzes IV 14 bezieht sich Korollar 1 auf einen allgemeinen Kugelabschnitt und Korollar 2 auf dessen Schwerpunkt. Ein einem Drehellipsoid schnittgleicher Körper wird im Korollar 3 *Homoeosphaericum* (sc. *solidum*) genannt. Im Korollar 4 handelt es sich um die Teilung von Kugel, Drehellipsoid und *Homoeosphaericum* nach einem gegebenen Verhältnis.

Während sich das Korollar 1 des Satzes IV 15 auf einen allgemeinen Abschnitt des (zweischaligen) Drehhyperboloids bezieht, wird im Korollar 2 als schnittgleicher Körper das „Hyperbolikoid" definiert und im Korollar 3 dieses sowie das zweischalige Drehhyperboloid nach einem gegebenen Verhältnis geteilt. Im Scholium weist Lalouvère unter Bezugnahme auf die Verhältnisse, nach denen die Achsen der in IV 13 bis 15 genannten Drehkörper durch die Schwerpunkte geteilt werden[71] (Hyperboloid 7:3, Paraboloid 6:3, Halbellipsoid 5:3) darauf hin, daß sich auch hierin die Namen ὑπερβολή und ἔλλειψις rechtfertigen; denn der Wert des Verhältnisses sei beim Hyperboloid größer, beim Ellipsoid kleiner als beim Paraboloid.

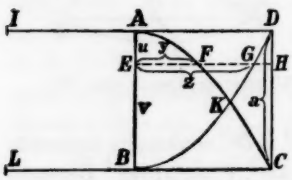

Abb. 52
(Entspr. Quadr. circ. S. 401).

In IV 16 sind (Abb. 52) die Parabeln $AK$ (Scheitel $A$, Achse $AB$) und $BK$ (Scheitel $B$, Achse $BA$) mit gleichem Parameter $AI = BL$ in ein Quadrat $BCDA$ eingeschlossen. Dann gilt für jede Parallele $EH$ zu $AD$, die die Parabeln in $F$ und $G$ schneidet,

$$EF^2 + EG^2 = AD^2.$$

---

[70] Archimedes[19]: *De conoidibus et sphaeroidibus* 26.

[71] Vergleiche hierzu J. Tropfke, a. a. O.[30], Anmerkung 1615, und insbesondere H. Wieleitner, a. a. O.[49], S. 201—20.

Dies ergibt sich sofort aus der Definition der Parabel, wonach

$$EF^2 = AE \cdot AI$$

und

$$EG^2 = BE \cdot BL$$

ist.

In moderner Schreibweise: Aus $y^2 = au$, $z^2 = av$ und $u + v = a$ folgt

$$y^2 + z^2 = a^2.$$

In IV 17 ist (Abb. 53) $CKG$ eine Hyperbel (mit dem Scheitel $C$, Mittelpunkt $B$, *latus rectum* $CD$, *diameter transversa* $AC$) und $CNO$ eine Parabel mit gleichem Scheitel und *latus rectum*. Man verlängert $AD$ bis $E$, zeichnet das Parallelogramm $ICDF$ und erhält $H$ gemäß

$$FH^2 = DF \cdot FE.$$

Wenn dann durch den beliebigen Punkt $L$ auf $CI$ die Parallele zu $EG$ gezeichnet wird, die die Schnittpunkte $K$, $N$, $P$, $Q$, $R$ liefert, so gilt:

1. $LN^2 + PQ^2 = LK^2$;
2. $IG^2 : IO^2 : FH^2 = AI : AC : CI$.

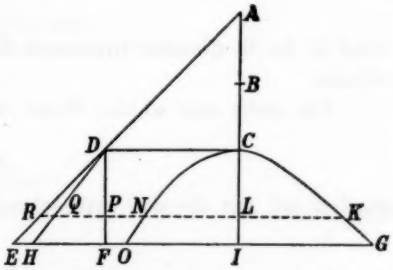

Abb. 53 (Entspr. Quadr. circ. S. 403).

Der Beweis läßt sich leicht mittels der Scheitelgleichungen erbringen.

Die folgenden Sätze (IV 18 bis 20) handeln vom Rauminhalt der Körper, wobei die Schwerpunktsbetrachtungen der voraufgegangenen Sätze Verwendung finden.

In IV 18 wird ausgesprochen, daß sich der Rauminhalt einer Kugel zu dem des umbeschriebenen Zylinders wie 2:3 verhält. Die Korollare besagen, daß die Halbkugel den doppelten Rauminhalt eines Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe hat (Kor. 1); daß auch ein Drehellipsoid sich zu dem umbeschriebenen Zylinder wie 2:3 verhält (Kor. 2); daß ein halbes Drehellipsoid den doppelten Rauminhalt eines Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe aufweist[72] (Kor. 3); ist der einbeschriebene Körper keine Kugel, sondern ein *Homoeosphaericum* (IV 14 Kor. 3), so heißt der umbeschriebene Körper „Zylindroid" (Kor. 4); wie der Kegel der dritte Teil eines Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so verhält sich auch das *Homoeoconicum* zum *Cylindraceus*[73] (=Zylindroid) (Kor. 5).

In IV 19 steht, daß der Rauminhalt eines Zylinders das Doppelte eines Drehparaboloids von gleicher Grundfläche und Höhe beträgt. In den Korollaren wird daraus gefolgert, daß ein Drehparaboloid den anderthalbfachen Rauminhalt eines Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe aufweist (Kor. 1); daß das Drehparaboloid auch durch ein Parabolikoid (IV 13 Kor. 2) ersetzt werden kann (Kor. 2); im Kor. 3 wird die Differenz der Rauminhalte eines Zylinders und eines einbeschriebenen Drehparaboloids gleich dem vierten Teil des Rauminhalts eines Zylinders von doppelter Grundfläche und gleicher Höhe erkannt.

---

[72] Lalouvère nennt den Körper zwar *semiconoides*, kann aber nur *semisphaeroides* meinen; und ein halbes Sphäroid hat ja tatsächlich das Aussehen eines Konoids.

[73] Lalouvères *Cylindraceus* ist von Keplers zylindrazeischem Körper zu unterscheiden; vergleiche Kepler, a. a. O.[58], S. 20.

Interessant ist der Beweis dieses Satzes IV 19: Lalouvère zeichnet (Abb. 54) neben den Zylinder (Achsenschnitt $ZKCA$) mit einbeschriebenem Drehparaboloid (Achsenschnitt $ZBK$) ein umgekehrt liegendes, deckungsgleiches Drehparaboloid (Achsenschnitt $CME$), beweist mittels IV 16 für eine beliebige Parallele $OX$ zu $ZN$ die Gleichheit von $TX^2$ und $OS^2-PR^2$ und so unter Benutzung von IV 11 die Gleichheit von rechtem Drehparaboloid und Restkörper, und damit die Behauptung[74].

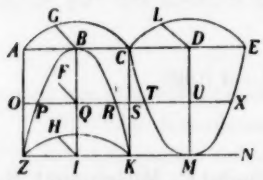

Abb. 54 (Quadr. circ. S. 415).

In IV 20 behauptet Lalouvère, daß sich der Rauminhalt der einen Schale eines zweischaligen Drehhyperboloids zu dem des einbeschriebenen Kegels verhält wie

$$(3a+h):(2a+h);$$

dabei ist $2a$ die *diameter transversa* der erzeugenden Hyperbel und $h$ die Höhe des Hyperboloids.

Das sieht man so ein: Wenn die erzeugenden Hyperbel durch

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

gegeben ist, hat die den einbeschriebenen Kegel erzeugende Gerade die Gleichung

$$y = \frac{x}{h}\sqrt{2ph + \frac{ph^2}{a}}.$$

Dann ist der Rauminhalt des Drehhyperboloids

$$V_1 = \pi\int_0^h \left(2px + \frac{p}{a}x^2\right)dx = \frac{\pi p h^2}{3a}(3a+h),$$

der des Kegels

$$V_2 = \pi\int_0^h \left(2p + \frac{p}{a}h\right)x^2\,dx = \frac{\pi p h^2}{3a}(2a+h),$$

woraus die Behauptung folgt.

Im Korollar wird der Satz auf Hyperbolikoid und *Homoeoconicum* verallgemeinert. — Der letzte Teil des Buches befaßt sich mit keilförmigen Körpern (*solida cuneata*).

IV 21 gibt die Grundlegung: Gegeben sind (Abb. 55) zwei Ebenen, die sich in der Geraden $AC$ schneiden. In der einen Ebene befinde sich eine Kurve $ADC$. Längs ihr werde ein auf der Ebene $ADC$ senkrechtes Lot herumgeführt und schneide so aus der zweiten gegebenen Ebene die Kurve $AEC$ heraus, wobei $E$ den Durchstoßpunkt der in $D$ errichteten Senkrechten mit der zweiten Ebene darstellt. So entsteht der Keil $ADCE$ mit der krummen Fläche, die von $ED$ überstrichen wird, als Grundfläche. $ADC$ und $AEC$ sind Seitenflächen, $AC$ die Schneide. Nun führt Lalouvère eine Quadratrix ein vermöge der Beziehung

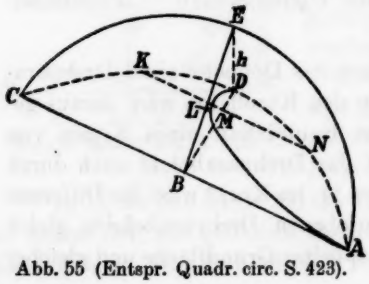

Abb. 55 (Entspr. Quadr. circ. S. 423).

$$BD:BM = NK:LK. \tag{28}$$

[74] Es erinnert dieses Verfahren an die Berechnung des Rauminhalts einer Halbkugel durch Vergleich mit dem Restkörper zwischen Zylinder und Kegel, wie es Chr. v. Wolff: *Elementa matheseos universae* I, Halle/S. 1717, S. 199, dargestellt hat. Wolff fußt auf Cavalieri, a. a. O.[27], S. 10—11, 86—87, und dieser auf L. Valerio, a. a. O.[24], lib. II, S. 17*f*. Dieser Zusammenhang erscheint mir bemerkenswert unter Hinweis auf S. 1 der *Appendix secunda* (siehe S. 4—5).

Dann ist, so behauptet Lalouvère, der Keil $ADCE$ raumgleich dem Körper, der die von der Quadratrix $ALD$, der Geraden $AC$ und der Kurve $CKD$ umgrenzte Fläche zur Grundfläche und $DE$ zur Höhe hat.

Um zu zeigen, daß die durch (28) definierte Funktion $q(x)$, die Quadratrix, tatsächlich die Kubatur bewirkt, gehen wir so vor: Wir wählen $D$ zum Ursprung eines rechtwinkligen räumlichen cartesischen Systems, so daß die $x$-Achse längs $DB$, die $y$-Achse parallel zu $BC$ verläuft und die $z$-Achse auf deren Ebene senkrecht steht. Die Kurve $ADC$ habe die Ordinate $y$, liege symmetrisch zur $x$-Achse und begrenze die Grundfläche $G$ des Keils, so daß

$$G = 2\int_0^a y\,dx$$

folgt. Bezeichnet man $BD$ mit $a$ und $DE$ mit $h$, so ergibt sich

$$z = \frac{h(a-x)}{a}$$

und damit als Rauminhalt des Keils

$$V = G\cdot z = 2h\int_0^a \frac{a-x}{a}\,y\,dx.$$

Nun ist aber

$$q : y = x : a,$$

also

$$(a-x)\,y = a\,(y-q)$$

und somit

$$V = 2h\int_0^a (y-q)\,dx,$$

so daß die Funktion $q(x)$ die Kubatur des Keils bewirkt.

IV 22 ist ein Sonderfall von IV 21 (Halbhuf) und zugleich Vorbereitung für IV 23. Man denke sich eine räumliche Schicht ähnlicher Parallelogramme in ähnlicher Lage, so daß jeweils eine Ecke und die von ihr ausgehenden Seiten senkrecht übereinanderliegen. (Abb. 56.) Geht man zur Grenze über (die Anzahl der Parallelogramme strebt dann gegen

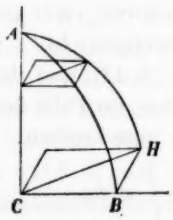


Abb. 56 (Entspr. Quadr. circ. S. 431).

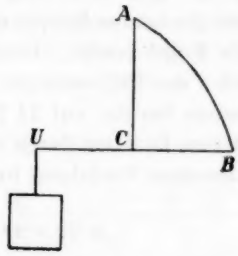


Abb. 57.

unendlich), so ist die von den übereinanderliegenden Ecken gebildete Gerade $AC$ die Schneide des (halben) Keils, und die einen Seiten und Diagonalen bilden die Seitenflächen des Keils. Den Kurven $AD$ und $AE$ von IV 21 entsprechen die Kurven $AB$ und $AH$.

In IV 23 nimmt Lalouvère ein Ausgangsparallelogramm gleichseitig an ($CB = BH$) und läßt die Kurve $AB$ um $AC$ rotieren (Abb. 57), so daß ein Drehkörper (*peripheric um*) entsteht; seine Grundfläche ist der Kreis mit dem Radius $CB$. Wählt man $UB$ ($UC = CB$)

als Waagenarm mit dem Drehpunkt $C$, so sei $CBA$ mit einer in $U$ hängenden Fläche im Gleichgewicht, deren Achtfaches ein Quadrat $Q$ sei. Dann verhält sich der doppelte Inhalt des genannten Drehkörpers zu dem Inhalt eines dem Würfel mit der Kantenlänge $UB$ einbeschriebenen Zylinders wie $Q$ zu $UB^3$. Analytisch: Die Fläche $CBA$ habe den Inhalt $F$; es sei $CA = x$, $CB = y$, und die Kurve $AB$ werde durch $y = f(x)$ gegeben. Dann gilt für die Schwerpunktsordinate $\eta$ der Fläche $CBA$:

$$\eta \cdot F = \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx.$$

Das Quadrat $Q$ ist das Achtfache der mit $CBA$ im Gleichgewicht befindlichen Fläche, das heißt es ist

$$\frac{Q \cdot \eta}{8} = \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx.$$

Dann ist der Rauminhalt $V$ des Drehkörpers, der durch Rotation von $y = f(x)$ um die $x$-Achse entsteht:

$$V = \frac{\pi y^2 \cdot 2y \cdot 4 \int_0^x y^2 dx}{2 \cdot 4 y^2 \cdot y} = \pi \int_0^x y^2 dx,$$

wie es auch die Integralrechnung lehrt.

Von den Korollaren besagt das erste, daß es für den Beweis nichts ausmacht, wenn man die Achse $AC$ nicht als auf $CB$ senkrecht stehend annimmt, während in Korollar 2 einige Sonderfälle bezüglich der Kurve $BA$ untersucht werden, und zwar wenn diese eine Gerade, ein Kreis, eine Parabel und eine Hyperbel ist. Im Korollar 3 definiert Lalouvère als „Xystroid" ein einschaliges Drehhyperboloid, dessen Schwerpunkt dann in IV 27 Scholium ermittelt wird. Damit tut Lalouvère einen wesentlichen Schritt über Archimedes hinaus; nach der bisherigen Überlieferung sollte Wren (Philosophical Transactions aus dem Jahre 1668) als erster das einschalige Drehhyperboloid ermittelt haben[75].

In IV 24 ist ein Halbkreis gegeben, der um seinen Durchmesser $2r$ rotiert. Derselbe Durchmesser ist Höhe eines geraden Kreiskegels, dessen Radius ebenfalls $2r$ betrage. Dann zeigt Lalouvère mittels des Hebelgesetzes (der genannte Durchmesser ist Waagebalken, die Spitze des Kegels Drehpunkt, der Kraftarm von der Länge $2r$), daß die der Summe der beiden Körper das Gleichgewicht haltende Kraft $z$ den gleichen Rauminhalt wie der Kegel besitzt. Ist die Ausgangskurve ein Zweig einer gleichseitigen Hyperbel, so hält $z$ der Differenz der beiden Körper das Gleichgewicht.

Der Beweis beruht auf II 7 und II 6 Korollar 2 (S. 18) und benutzt Schnitte, die senkrecht zum Lastarm durch den Körper gelegt werden; im Falle des Kreises könnte man also Lalouvères Verfahren folgendermaßen modern umschreiben:

$$z \cdot 2r = \pi r \int_0^{2r} (2rx - x^2) dx + \frac{3}{2} \pi r \int_0^{2r} x^2 dx.$$

Hieraus ergibt sich $z = \frac{8}{3} \pi r^3$, wie behauptet.

Im Korollar 2 führt Lalouvère aus, daß der Satz sich auch auf eine Parabel ausdehnen läßt, deren Scheitel im Drehpunkt liegt und deren *latus rectum* gleich dem Kraftarm ist. Das Korollar 3 enthält die Verallgemeinerung auf *Homoeosphaericum* und *-conicum*.

In IV 25 wird dem Halbzylinder $YZULCM$ vom Inhalt $\frac{1}{2} \pi r^2 h$ (Abb. 58) durch den Würfel $z$ das Gleichgewicht gehalten. Dabei ist der Durchmesser $AC = 2r$ des ganzen

[75] H. Wieleitner (*Geschichte der Mathematik* II², Berlin und Leipzig 1921, S. 55) nennt zwar Wallis (*Mechanica* II, London 1670), doch referiert hier Wallis nur über Wrens Arbeit.

Zylinders Waagebalken mit $B$ als Drehpunkt. Lalouvère behauptet dann, daß $z$ raumgleich einer quadratischen Säule von der Grundfläche $\frac{2}{3}r^2$ und der Höhe $h$ ist. Analytisch:

$$z \cdot r = 2h \int_0^r \int_0^r y dx dy = h \int_0^r y^2 dx.$$

Im Korollar 1 wird als Grundfläche der Last ein beliebiges Segment eines Kreises oder einer gleichseitigen Hyperbel genommen (Beweis unter Benutzung von III 17, S. 33—34), während im Korollar 2 der Fall eines schiefen Zylinders erörtert wird. Im Korollar 3 wird an die Stelle der quadratischen Säule ein Quader gesetzt, wogegen im Korollar 4 ein Zylindroid an die Stelle des Zylinders tritt.

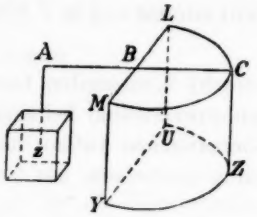


Abb. 58 (Entspr. Quadr. circ. S. 460).

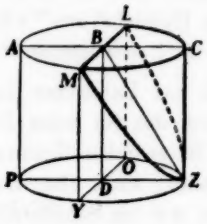


Abb. 59 (Entspr. Quadr. circ. S. 465).

In IV 26 wird von einem elliptischen oder hyperbolischen Halbzylinder durch eine Ebene ein Huf (*primus cuneus notus*) abgeschnitten (Abb. 59). Diese Ebene geht durch die Nebenachse der Deckfläche und den einen Hauptscheitel der Grundfläche. Jede durch die beiden Nebenachsen von Grund- und Deckkegelschnitt gehende oder zu ihnen parallele Ebene heiße „Querebene" (*parallelum condictum*). Dann kann jeder durch zwei Querebenen abgeschnittene Teil des Hufes kubiert werden[76], und zwar geschieht das durch Umwandlung in einen raumgleichen Zylinder gemäß IV 21.

Wie das Korollar sagt, ist der ganze *primus cuneus notus* $(MCL)Z$, der ja ein gerades Zylinderhuf mit elliptischer oder hyperbolischer Grundfläche darstellt, raumgleich der quadratischen Säule aus IV 25.

Das Scholium besagt, daß die Kubatur des Zylinders beziehungsweise Zylindroids die Quadratur ihrer Grundflächen beziehungsweise ihrer Segmente ermöglicht sowie die Kubatur von Kegel, Kugel, Drehellipsoid, Drehparaboloid und (zweischaligem) Drehhyperboloid. — Im Gegensatz zu dem hier behandelten *primus cuneus notus* führt Lalouvère in V 11 einen *alter cuneus notus* ein.

In IV 27 hat die Hyperbel mit den Scheiteln $B$ und $D$ und dem Mittelpunkt $C$ (Abb. 60) die Nebenachse $RM$ und das *latus rectum* $DQ = 2RM$. Man wähle $C$ zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der $x$-Achse $BD$ und der $y$-Achse $RM$ und auf der $x$-Achse einen beliebigen Punkt $E$. Die Parallele zur $x$-Achse durch $E$ schneidet den rechten Hyperbelast in $O$ und $N$. Dann werden die auf der Parallelen zur $x$-Achse gelegenen Punkte $T$ und $Z$ bestimmt durch die Proportionen:

1. $OT : ON = DB : DQ$;
2. $OZ : OT = NO : EC$.

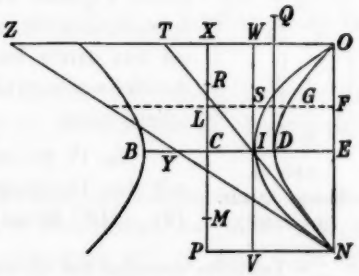


Abb. 60 (Entspr. Quadr. circ. S. 470).

[76] Vergleiche hierzu auch die Bemerkungen in der *Appendix*, S. 620, Zeile 4 von unten, bis S. 621, Zeile 7 von oben.

$NZ$ schneidet die $x$-Achse in $Y$, und $I$ ist Mittelpunkt von $YE$ und Scheitel der Parabel, die $IE$ zur Achse hat und durch $O$ und $N$ geht. Zieht man dann $LF$ parallel zu $BD$, so ist

$$LG^2 = LF \cdot LS;$$

dabei sind $S$, $G$ und $F$ die Schnittpunkte jener Parallelen mit der Parabel, Hyperbel und mit $NO$.

Im Scholium geht Lalouvère — in Anlehnung an die entsprechenden Verhältnisse bei der Ellipse — auf die Möglichkeit zwei- und einschaliger Drehhyperboloide ein und greift damit die Definition des in IV 23 Korollar 3 (S. 46) eingeführten Xystroids auf. Es wird behauptet, daß der Schwerpunkt des Xystroids, dessen Achse vom Mittelpunkt der erzeugenden Hyperbel aus[77] wie 23:17 teilt, was freilich nicht stimmt und in V 3 Scholium alterum zu 15:7 richtiggestellt wird[78]. —

Damit hat Lalouvère die für seine Zwecke in Betracht kommenden Drehkörper (einschließlich des für seine Zeit neuen einschaligen Drehhyperboloids) behandelt. Die letzten drei Sätze geben Ergänzungen, die zwar für den systematischen Aufbau des Werkes nicht notwendig sind, aber Lalouvère bemerkenswert genug erscheinen, um sie zu veröffentlichen, wie im Scholium zu IV 30 gesagt wird.

Den Satz IV 28 setzt Lalouvère mit IV 11 in Vergleich: Wenn zwei Drehkörper gleich lange Achsen haben und ihre Querschnitte im Gleichgewicht sind (wobei die Drehpunkte aller *librae grammicae* auf einer Geraden liegen), so sind auch die Drehkörper selbst bezüglich dieser Geraden als Drehachse einer *libra plana* im Gleichgewicht. Der mathematische Kern dieses Prinzips ist folgender: Wenn zwei Drehkörper gleiche Höhe haben und alle Querschnitte bezüglich einer Achse im Gleichgewicht sind, so sind auch die Körper als ganze im Gleichgewicht.

Auch dieser Satz, dessen Verwandschaft mit IV 11 (S. 40) Lalouvère ausdrücklich betont, wird nur der Sache nach erklärt und dann an Beispielen verifiziert: *Illam (propositionem) tamen probabilem efficere mihi videor ex eo, quod, si continuum componeretur ex indivisibilibus, res esset aperta; aliunde vero in plurimis casibus id ita esse legitimis demonstrationibus evincatur posita continui divisibilitate in infinitum, quod argumento est eiusmodi divisibilitatem esse per accidens in praesenti negotio, praesertim cum in nullo casu, quem sciam, falsum esse id quod petimus ostendi possit; imo data illius veritate omni mire consonant, ut ex sequentibus liquidum est*[79]. Im Korollar wird ausgeführt, daß sich die Methode auf Zylinder, Kegel, Prismen, Pyramiden und Konoide anwenden läßt. In einer *pars altera* wird der Satz auf ebene Figuren übertragen, wobei sich häufig Verbindungen mit entsprechenden Sätzen des Buches III ergeben. Von den fünf Korollaren sei das dritte besonders erwähnt, in dem die Archimedische Methode der Schwerpunktsbestimmung eines Dreiecks[80] auf andere Figuren übertragen wird.

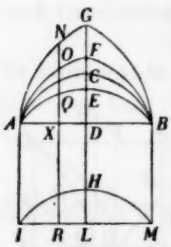

Abb. 61
(Entspr. Quadr. circ. S. 491).

In IV 29 stehen (Abb. 61) die Parabelsegmente $ACB$ und $AGB$ mit den Durchmessern $DC$ und $DG$ über derselben Sehne $AB$, und es ist $DG = 2DC$. Es sei $LH$ Durchmesser eines weiteren Parabelsegments $IHM$,

[77] Lalouvère betrachtet nur die eine Hälfte des Drehkörpers, so daß das schmale Ende die Schnittfläche $\pi a^2$ hat, wenn $2a$ die Hauptachse der erzeugenden Hyperbel ist.

[78] *Quadr. circ., Appendix*, S. 621, Zeile 12—18 von oben.

[79] *Quadr. circ.* S. 476, Zeile 4—15 von oben.

[80] Archimedes, a. a. O. [22], I 13.

dessen Sehne $IM$ gleich $AB$ ist. Über $AB$ zeichne man noch zwei Parabeln $AEB$ und $AFB$ mit den Durchmessern $DE$ und $DF$, so daß $EF = LH$ ist und $C$ den Abstand $EF$ halbiert. Zieht man dann zu $AI$ eine beliebige Parallele $NXR$, so haben die Flächen $QEFO$ und $XDGN$ denselben Schwerpunkt.

Den Beweis führt Lalouvère unter Benutzung von II 15 (S. 22). Wir würden heute so schließen: Wenn die Parabeln durch die Gleichungen wiedergegeben werden

$$AGB\colon\ y = 2p\frac{a^2-x^2}{a^2},$$

$$ACB\colon\ y = p\frac{a^2-x^2}{a^2},$$

$$IHM\colon\ y = 2q\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

und demnach

$$AFB\colon\ y = (p+q)\frac{a^2-x^2}{a^2},$$

$$AEB\colon\ y = (p-q)\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

ist, so gilt für die Schwerpunktsordinate $\eta_1$ der Fläche $XDGN$

$$\eta_1 \cdot XDGN = \int_{x_1}^{x_2} 2px\frac{a^2-x^2}{a^2}\,dx.$$

Für die Fläche $QEFO$ mit der Schwerpunktsordinate $\eta_2$ gilt:

$$\eta_2 \cdot QEFO = \int_{x_1}^{x_2} 2qx\frac{a^2-x^2}{a^2}\,dx.$$

Nun verhält sich aber

$$XDGN : QEFO = p : q,$$

also ist $\eta_1 = \eta_2$.

Im Korollar 1 untersucht Lalouvère den Fall, daß $AB$ und $IM$ nicht die Sehnen der Parabelsegmente sind, während er im Korollar 2 den Satz auf die vollen Segmente $ADBG$ und $AEBF$ überträgt.

Satz IV 30 lehrt schließlich, daß sich die Schwerpunktsordinaten affiner Parabelsegmente wie die zugehörigen Durchmesser verhalten. —

Aus Buch IV möchte ich folgendes herausstellen:

1. Die Lösung einer Gleichung dritten Grades durch Schnitt von Parabel und Hyperbel (IV 6, 7, S. 39).

2. Den dem sogenannten Cavalierischen Prinzip äquivalenten Satz IV 11 (S. 40) mit der Erweiterung auf die Lage der Schwerpunkte.

3. Das für die Schwerpunktsbestimmung in IV 12 bis 15 (S. 40—41) unter Zuhilfenahme einer Parabel entwickelte Verfahren, wie es am Beispiel von IV 12 dargestellt wurde (S. 41—42).

4. Die Definition von Körpern, die den durch Drehung der Kegelschnitte um ihre Achsen hervorgebrachten Körpern „schnittgleich" sind: *Homoeoconicum* (IV 12 Kor. 2, S. 42), Parabolikoid (IV 13 Kor. 2, S. 42), *Homoeosphaericum* (IV 14 Kor. 3, S. 42), Hyperbolikoid (IV 15 Kor. 2, S. 42), Zylindroid (IV 18 Kor. 4, S. 43).

5. Die Einführung einer Quadratrix zur Kubatur des *solidum cuneatum* in IV 21 (S. 44—45).

6. Das Xystroid (= einschaliges Drehhyperboloid) in IV 23 Korollar 3 (S. 46) und IV 27 Scholium (S. 48).

7. Die Kubatur mittels des Schwerpunktssatzes in IV 25 (S. 47) und ihre Verwendung beim *primus cuneus notus* (IV 26, S. 47).

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß Lalouvère die Sätze IV 11 und IV 28 im Grunde als Axiome ansieht; denn er erläutert ihren Inhalt (ohne zu beweisen) und zeigt an Beispielen ihre Verwendbarkeit. An zwei Stellen bezeichnet er diese Sätze sogar ausdrücklich als „Postulate":

a) Im Anschluß an IV 28[81]: *Haec est altera propositio, quam cum praesentis libri undecimae parte primo dari mihi postulo.*

b) Am Schluß des ganzen Buches[82]: *Ceterum postulatum illud propositionis undecimae istudque vigesimae octavae adeo certa existimamus, ut in humanis scientiis (seponimus hac voce divinitus inspiratae) nihil esse certius putamus.*

## § 8. Buch V.

*Absolutam circuli, hyperbolae et reliquorum inde pendentium quadraturam assequens.* Mit diesen Worten[83] leitet Lalouvère das letzte Buch seines Werkes ein. Wenn er auch am Schluß[84] bekennen muß: *ac proinde necdum inventam esse a nobis quadraturam circuli, ut nihil amplius desideretur et inquirendum restat,* so gibt er doch eine Reihe interessanter Sätze über konische und zylindrische Hufe.

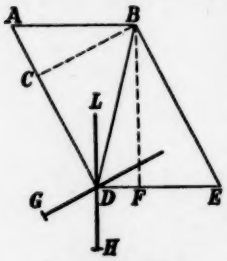

Abb. 62 (Entspr. Quadr. circ. S. 503).

In einem Vorwort weist Lalouvère auf eine ohne sein Verschulden entstandene Verzögerung um zwei Jahre in der Herausgabe des Werkes hin; hierdurch wird auch die Differenz zwischen Freigabevermerk (1648) und Erscheinungsjahr (1651) verständlich.

In V 1 knüpft Lalouvère an II 11 (S. 20) an: Gegeben ist (Abb. 62) als Last das Parallelogramm *DEBA*, in dem von *B* aus die Lote *BC* und *BF* gefällt werden und *D* Drehpunkt der zu *CB* und *BF* parallelen Waagebalken *GI* und *HL* (mit $GD = HD$) ist. Dann zeigt Lalouvère, wie eine Last, deren Schwerpunkt auf *BD* liegt, in Komponenten nach *DG* und *DH* zerlegt werden kann: Parallelogramm der Kräfte. (Der Grundgedanke findet sich schon bei Stevin, der neben anderen Aristoteles und Heron zu Vorgängern hat[85].)

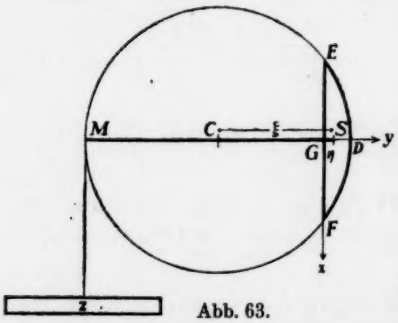

Abb. 63.

Die folgenden beiden Sätze bringen im Anschluß an Buch III die rechnerische Auswertung der Kreis- und Hyperbelquadratur, wie sie Lalouvère bereits im Vorwort *Ad lectorem* ankündigt (siehe S. 4).

In V 2 (Abb. 63) wird behauptet, daß ein in seinem Schwerpunkt *S* aufgehängter Kreisabschnitt *FDEG*, dessen Sehne *EF* drei Fünftel des Kreisdurchmessers $2r$ beträgt, im Gleichgewicht ist

[81] *Quadr. circ.* S. 475, Zeile 3—1 von unten.
[82] *Quadr. circ.* S. 476, Zeile 4—15 von oben.
[83] *Quadr. circ.* S. 500, Zeile 4—7 von oben.
[84] *Quadr. circ.* S. 614, Zeile 2—5 von oben.
[85] Vergleiche E. Hoppe: *Geschichte der Physik.* Braunschweig 1926, S. 10, 18, 24.

mit einem am anderen Ende des Kreisdurchmessers in $M$ aufgehängten Rechteck $z$, dessen Länge gleich der Sehne des Kreisabschnitts und dessen Breite $\frac{3}{25}$ des Kreishalbmessers $r$ ist. Dabei ist der Kreisdurchmesser $MD$ Waagebalken mit dem Mittelpunkt $C$ als Drehpunkt.

Das Korollar gibt unter Hinweis auf IV 25 (S. 47) eine Erweiterung auf Körper, während das Scholium den Satz mit III 18 und III 19 vergleicht.

Den Beweis von V 2 führt Lalouvère so, daß er eine Parabel und eine weitere (geschlossene) Hilfskurve einführt, deren Flächeninhalt mit dem des gegebenen Halbkreises im Gleichgewicht ist. Dann erfolgt der Vergleich mit dem Parabelsegment, das einem Dreieck gleichgesetzt und damit quadriert werden kann, und die eigentliche Rechnung.

In moderner Darstellung schlösse man folgendermaßen: Wählt man $G \triangleq \left(0;\ \frac{4}{5} r\right)$ als Ursprung des angedeuteten Koordinatensystems, so lautet die Kreisgleichung:

$$y^2 = \frac{9}{25} r^2 - \frac{8}{5} rx - x^2.$$

Dann ist, wenn $F$ den Inhalt des Kreisabschnitts $FDEG$ und $\eta$ seine Schwerpunktsordinate darstellt:

$$\eta \cdot F = \int_0^{3r/5} y^2 dx = \frac{18}{125} r^3.$$

Nimmt man nun $r$ als Kraftarm $CM$, so kann

$$\frac{18}{125} r^2 = \frac{6}{5} r \cdot \frac{3}{25} r$$

als die Kraft $z$ gedeutet werden.

In V 3 gibt Lalouvère unter Benutzung von IV 27 (S. 47—48) die quantitative Auswertung der Hyperbelquadratur, und zwar behauptet er (siehe Abb. 60, S. 47):

a) $$\eta \cdot F = BC \cdot \frac{8}{3} NE^2 = a \cdot \frac{8}{3} (2a)^2 = a \cdot \frac{32}{3} a^2,$$

wobei $F$ den Inhalt des *segmentum hyperbolae condictum ODN* und $\eta$ den Schwerpunktsabstand von $C$ bedeutet. Ein solches Segment soll entsprechend III 18 Korollar 2 (Quadr. circ. S. 303), IV 23 Korollar 4 (Quadr. circ. S. 449—450) und IV 28 *pars altera* (Quadr. circ. S. 484) so beschaffen sein, daß seine Hälfte einem Quadrat von der Seitenlänge $2a$ einbeschrieben werden kann ($2a =$ *diameter transversa*).

b) Ist speziell $DE = \frac{1}{7} DB$ und $EO = 2DE$, so soll

$$\eta \cdot F = BC \cdot NO \cdot \frac{16}{147} DB = a \cdot \frac{8}{7} a \cdot \frac{16}{147} 2a = a \cdot \frac{256}{1029} a^2$$

sein. (Hier heißt *ODN alterum segmentum hyperbolae condictum.*) Den Beweis führt man am einfachsten so, daß man die Hyperbel in der Mittelpunktsgleichung ansetzt (auch Lalouvère nimmt $C$ als Drehpunkt der Waage!), $XP$ als Abszissen-, $CE$ als Ordinatenachse nimmt und das Moment des gesuchten Hyperbelsegments $ODN$ als Differenz der Momente des Rechtecks $XPNEO$ und der Fläche $XPNDO$ ansetzt:

a) $$\eta \cdot F = 12a^2 \cdot \frac{3}{2} a - \int_0^{2a} (2x^2 + a^2)\, dx = 18\, a^3 - \frac{22}{3} a^3 = a \cdot \frac{32}{3} a^2.$$

b) $$\eta \cdot F = \frac{72}{49} a^2 \cdot \frac{9}{14} a - \int_0^{4a/7} (2x^2 + a^2)\, dx = \frac{324}{343} a^3 - \frac{716}{1029} a^3 = a \cdot \frac{256}{1029} a^2.$$

Interessant ist nun, daß auch Lalouvère auf einem ähnlichen Wege vorgeht, wie für den Fall a) gezeigt werden möge: Lalouvère teilt (siehe Abb. 60, S. 47) $CE$ in neun gleiche Teile, setzt also

$$CE = 9x,$$

und beweist zunächst, daß

$$CE:CD:CI = 9:3:1$$

ist. Dann ergibt sich das Parabelsegment $NIO$ zu $64x^2$, das Dikeratoid $VNIOW$ zu $32x^2$ und die Fläche $PNIOX$ zu

$$44x^2 = NE \cdot \frac{22}{3} x = NE \cdot 22y$$

mit $x = 3y$. Nun ist nach IV 27 (S. 47—48)

$$CE : \frac{1}{2} CD = CD : \frac{1}{2} CI,$$

und dasselbe gilt für alle Parallelen zu $CI$, so daß

$$PNIOX = NE \cdot 11y = NE \cdot \frac{11}{27} CE$$

mit $PNDOX$ im Gleichgewicht ist. Dann ist aber $PNOX$ mit $NE \cdot CE$ im Gleichgewicht und $NE \cdot \frac{16}{27} CE$ mit $OINE$. Ersetzt man nun den Lastarm $CE = 27y$ durch

$$BC = CD = 9y,$$

so folgt, daß das gesuchte Hyperbelsegment $ODN$ im Gleichgewicht ist mit

$$NE \cdot \frac{16}{9} CE = NE \cdot \frac{48}{27} CE = NE \cdot \frac{48}{18} BD = NE \cdot \frac{48}{18} NE = \frac{8}{3} NE^2;$$

also ist

$$\eta \cdot ODN = BC \cdot \frac{8}{3} NE^2,$$

wie behauptet. —

Während Lalouvère im Korollar das Ergebnis von V 3 (gemäß IV 25, S. 47) auf Körper überträgt und im ersten Scholium auf die Schwierigkeit der letzten Rechnungen[86] hinweist, wird im zweiten Scholium

1. der Rauminhalt des (halben) einschaligen Drehhyperboloids als $\frac{11}{27}$ eines Zylinders von gleicher Höhe und dem Radius $CE = 3a$ berechnet;

2. das in IV 27 Scholium (S. 48) mitgeteilte Verhältnis, in dem die Schwerpunktsordinate des (halben) einschaligen Drehhyperboloids dessen Achse teilt, zu 15:7 richtig gestellt, wobei der größere Abschnitt am Mittelpunkt der erzeugenden Hyperbel liegt.

In beiden Fällen handelt es sich um die in III 18 Korollar 2 (S. 35), IV 27 (S. 47—48) und V 3 (S. 51) benutzte spezielle Hyperbel mit der *diameter transversa* $2a$, deren *latus rectum* $a$ und deren Nebenachse $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ beträgt. Sie hat die Scheitelgleichung

$$y^2 = ax + \frac{1}{2} x^2$$

[86] Ein gutes mathematisches Gefühl verrät dabei die Bemerkung, daß man einen Unterschied machen müsse zwischen einem reinen Rechen- und einem Denkfehler; sei die geometrische Überlegung an sich richtig, könne ein eventueller Rechenfehler leicht ausgemerzt werden.

und die Mittelpunktsgleichung

$$x^2 - 2y^2 = a^2$$

(vergleiche S. 51, wo lediglich die Achsen vertauscht sind).

Diese Hyperbel ist auch im folgenden stets gemeint, wenn vom *segmentum hyperbolae condictum* die Rede ist.

Es folgt nun der Beweis der beiden Behauptungen des zweiten Scholiums von V 3 (siehe oben):

1. $$V(Zyl) = 18a^3\pi,$$

$$V(Hyp) = \pi \int_0^{2a} (2x^2 + a^2)\,dx = \frac{22}{3} a^3\pi,$$

also

2. $$V(Hyp) : V(Zyl) = \frac{22}{3} : 18 = 11 : 27.$$

$$\eta \cdot V(Hyp) = \pi \int_0^{2a} (2x^3 + a^2 x)\,dx = 10a^4\pi;$$

demnach

$$\eta = 10a^4\pi : \frac{22}{3} a^3\pi = \frac{15}{11} a = \frac{15}{22} \cdot 2a,$$

das heißt

$$\eta : (2a - \eta) = 15 : 7.$$

Im Anschluß an die Sätze V 2 und V 3 sei angemerkt, daß Lalouvère die im weiteren Verlauf des Buches dargestellten Körper meist über den in V 2 und V 3 behandelten Segmenten als Grundflächen errichtet:

1. a) Halbkreis,
   b) Kreisabschnitt mit der Sehne $\frac{3}{5} \cdot 2r$;
2. *segmentum hyperbolae condictum*, und zwar (vergleiche Abb. 60, S. 47)
   a) mit $DE = EO = BD = 2a$,
   b) mit $DE = \frac{1}{7} BD = \frac{2}{7} a$ und $EO = \frac{2}{7} BD = \frac{4}{7} a$.

In V 4 erzeugt Lalouvère ein *Homoeoconicum*, indem er einen geraden Kreiskegel durch eine auf der Grundfläche senkrechte Ebene, die die Achse enthält, teilt. Sei $CBD$ Achsenschnitt des *Homoeoconicums* (Abb. 64), $L$ sein Schwerpunkt, $G$ der Schwerpunkt der Grundfläche (eines Halbkreises), $LH$ das Lot von $L$ auf $CB$. Dann gilt:

$$CH : HG = 3 : 1.$$

Den Beweis führt Lalouvère so, daß er zeigt: Der Schwerpunkt $L$ des *Homoeoconicums* liegt erstens auf $DG$, zweitens auf der zur Grundfläche parallelen Ebene, die die Achse $DC$ von der Spitze aus wie 3:1 teilt. Also ist

$$DL : LG = 3 : 1$$

und damit auch

$$CH : HG = DL : LG = 3 : 1.$$

Abb. 64
(Entspr. Quadr. circ. S. 520).

Nach Korollar 1 braucht die Schnittebene nicht durch die Kegelspitze zu gehen, wenn sie nur auf $CB$ senkrecht steht. Im Korollar 2 gibt Lalouvère eine triviale Folgerung

für den Fall eines Halbzylinders (statt Halbkegels); im Korollar 3 sagt er, daß die „Kräfte", die einem Halbkegel (halben *Homoeoconicum*) und einem Halbzylinder (halben Zylindroid) das Gleichgewicht halten ($C$ Drehpunkt), im Verhältnis 1 zu 4 stehen:

$$z_1 = \frac{1}{6} r^2 h, \quad z_2 = \frac{2}{3} r^2 h .$$

V 5 ist für die folgenden Sätze (bis V 10) grundiegend und werde deshalb ausführlich betrachtet: es handelt sich um Schwerpunkt und Rauminhalt eines *Homoeoconicum condictum*, das einen Sonderfall des in V 4 genannten *Homoeoconicums* darstellt. Gegeben ist (Abb. 65) ein Ellipsen- oder Hyperbelsegment $MCL$ (die Abbildung entspricht dem Fall einer Ellipse); $AC$ ist *diameter transversa* und $B$ ihr Mittelpunkt. Die Tangente $AK$ ist dem Durchmesser $ML$ parallel, die Ebene $DBC$ senkrecht zur Ebene $MCL$; $D$ ist Spitze des Kegels, der den gegebenen Kegelschnitt zur Grundfläche hat. Dann heißt der Körper, der durch die Kegeloberfläche und eine Ebene begrenzt wird, die durch $D$ geht und die Ebene $MCL$ senkrecht zu $AC$ schneidet, *Homoeoconicum condictum*, und zwar

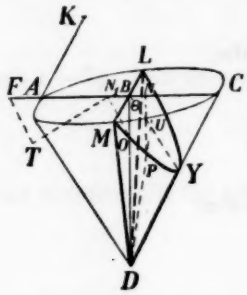

Abb. 65
(Entspr. Quadr. circ. S. 527).

a) hyperbolisch, wenn $MCL$ ein Hyperbelsegment,

b) elliptisch, wenn $MCL$ ein Ellipsensegment,

c) parabolisch, wenn die schneidende Ebene $L\Theta Y$[87] zur Ebene $KAD$ parallel ist. Ein parabolisches *Homoeoconicum condictum*, das fortan „Parabelhuf" genannt werde, wird also von dem Kegelmantel, der Ebene $D\Theta L$ und der Ebene $L\Theta Y$ begrenzt.

Lalouvère bestimmt im Falle c) $U$ auf $\Theta Y$ so, daß

$$YU : UB = 3 : 2$$

ist. Dann ist $U$ Schwerpunkt des Parabelsegments $MYL$[88]. $P$ wird auf $DU$ durch die Bedingung $DP = 3PU$ festgelegt. Schließlich ziehe man $PN$ parallel zu $DB$, wobei $N$ auf $AC$ liegt.

Dann wird behauptet:

1. $P$ ist Schwerpunkt des Parabelhufs.

2. Der Rauminhalt des Parabelhufs ist gleich dem eines Spats, dessen Grundfläche gleich der Fläche des Parabelsegments und dessen Höhe der dritte Teil der Höhe $BD$ ist.

3. Bestimmt man einen Spat $\lambda$ so, daß er sich zu dem in 2. genannten wie $BN$ zu $AB$ verhält, so ist $\lambda$ mit dem Parabelhuf im Gleichgewicht, wenn die Waage $B$ als Drehpunkt hat und $\lambda$ in $A$ hängt.

Zum Beweis von 1. zieht Lalouvère in dem Dreieck $\Theta DY$ Parallelen zu $\Theta Y$, die die Achsen einander ähnlicher Parabelsegmente darstellen. $DU$ ist der Ort ihrer Schwerpunkte; also liegt auch der Schwerpunkt des Parabelhufs auf $DU$ (IV 11, S. 40), und zwar ist er der Punkt $P$ (IV 12 Kor. 2, S. 42). Zu 2. bemerkt Lalouvère, daß Spat und Parabelhuf dem dritten Teil eines Zylinders von der Grundfläche und Höhe des Hufs raumgleich sind (IV 18 Kor. 5, S. 43) und daher auch untereinander gleichen Rauminhalt haben. 3. folgt gemäß Archimedes'[23] *Quadratura parabolae* 6 aus der Proportion

$$AB : BN = Spat : \lambda .$$

[87] Wenn $LM$ Durchmesser ist, fällt $\Theta$ mit $B$ zusammen.

[88] Archimedes[22]: *De aequiponderantibus* II 8.

Im Scholium steht, daß das behandelte *Homoeoconicum* kurz durch seinen Achsenschnitt $D\Theta Y$ bezeichnet wird und diese Schreibweise künftig häufig statthat.

Im Verlauf dieses Satzes V 5[89] nennt Lalouvère übrigens die auf Seite 42 erwähnte, bisher noch nicht bekannte Schrift von sich: *De communi sectioni plani et turbinatae superficiei ex puncto quiescente a linea recta per ellipsim, parabolam et sectiones oppositas circumducta descriptae.*

In den folgenden beiden Sätzen werden nun besondere Fälle des in V 5 eingeführten Parabelhufs behandelt, und zwar wenn die Grundfläche ein Halbkreis oder ein Kreissegment gemäß V 2 (siehe S. 50—51) und ein Hyperbelsegment gemäß V 3 a) und b) (siehe S. 52) darstellt.

V 6: Ist $MCL$ ein Halbkreis (vergleiche Abb. 65, S. 54), so ist der Parabelhuf raumgleich einem Spat mit der Grundfläche $\frac{2}{9}BC^2$ und gleicher Höhe. Ist insbesondere $L\Theta M = \frac{3}{5}AC$, so ist die Grundfläche ein Rechteck aus $\frac{3}{5}AC$ und $\frac{1}{50}AC$.

Der Beweis kann mit Lalouvère dadurch elementargeometrisch geführt werden, daß man den Parabelhuf $D\Theta Y$ als *Homoeoconicum* mit der Grundfläche $MYL$ und einer Höhe ansieht, die durch das von $D$ auf $\Theta Y$ gefällte Lot dargestellt wird: im ersten Falle ist die Grundfläche

$$MYL = \frac{2}{3}BC \cdot CD,$$

die Höhe

$$\frac{BC \cdot BD}{CD},$$

also der Rauminhalt

$$\frac{2}{9}BC^2 \cdot BD;$$

im zweiten Falle ist

$$MYL = \frac{1}{25}AC \cdot CD,$$

die Höhe

$$\frac{9AC \cdot BD}{10CD},$$

also der Rauminhalt

$$\frac{3}{250}AC^2 \cdot BD = \frac{3}{5}AC \cdot \frac{1}{50}AC \cdot BD.$$

V 7: a) Ist $MCL$ ein *segmentum hyperbolae condictum*, also $C\Theta = \Theta L = AC$, so ist die Grundfläche des dem *Homoeoconicum* raumgleichen Spats von der Höhe $BD$ gleich $\frac{8}{9}AC^2$.

b) Ist insbesondere $C\Theta = \frac{1}{7}AC$ (*alterum segmentum hyperbolae condictum*), so ist die Grundfläche des raumgleichen Spats ein Rechteck aus

$$L\Theta M = \frac{4}{7}AC$$

und $\frac{16}{441}AC$.

*Beweis.* a) Die Grundfläche $MYL$ des Parabelhufs hat den Inhalt

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2AC \cdot AD = \frac{4}{3}AC \cdot AD,$$

[89] *Quadr. circ.* S. 528, Zeile 16—13 von unten.

da $AC = C\Theta$ ist (vergleiche Abb. 66, die einen Achsenschnitt darstellt). Für die Höhe ergibt sich

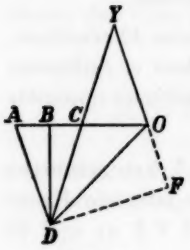


Abb. 66
(Entspr. Quadr. circ. S. 540).

$$DF = \frac{2AC \cdot BD}{AD},$$

so daß dieser hyperbolische Parabelhuf als *Homoeoconicum* den Rauminhalt

$$\frac{8}{9} AC^2 \cdot BD$$

aufweist, wie behauptet.

b) Ist

$$C\Theta = \frac{1}{7} AC,$$

also

$$LM = \frac{4}{7} AC,$$

so erhält man für die Grundfläche

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} AC \cdot \frac{1}{7} AD = \frac{8}{147} AC \cdot AD,$$

für die Höhe

$$DF = \frac{8AC \cdot BD}{7AD},$$

also für den Rauminhalt

$$\frac{64}{3087} AC^2 \cdot BD = \frac{4}{7} AC \cdot \frac{16}{441} AC \cdot BD.$$

Berechnet man nach 3. in V 5 (S. 54) die „Kräfte" $\lambda$ in den vier Fällen der letzten beiden Sätze, so ergeben sich bei gleichbleibender Höhe $BD$ Spate mit folgenden Grundflächen:

$$\frac{1}{30} BC^2, \ \frac{3}{5} AC \cdot \frac{63}{5000} AC; \ \frac{26}{15} AC^2, \ \frac{4}{7} AC \cdot \frac{172}{5145} AC.$$

In V 8 kommt nun der Rauminhalt des elliptischen und hyperbolischen *Homoeoconicums* [V 5 a) und b), S. 54] an die Reihe. Dieser ergibt sich jedoch gemäß V 4 Korollar 3 (S. 54) daraus, daß ihm von $\frac{1}{4}$ desjenigen Körpers das Gleichgewicht gehalten wird, der dem Zylindroid von gleicher Grundfläche und Höhe das Gleichgewicht hält.

Es seien die „Kräfte", die einem parabolischen, elliptischen und hyperbolischen *Homoeoconicum* das Gleichgewicht halten, der Reihe nach mit $\lambda$, $\varepsilon$ und $\zeta$ bezeichnet. Dann sagt Lalouvère in Korollar 1, daß $i = \varepsilon - \lambda$ der Differenz der entsprechenden *Homoeoconica* das Gleichgewicht hält und Entsprechendes für $\lambda - \zeta$ gilt; dabei hängt $i$ in $A$.

Im Korollar 2 wird nun die Rechnung für die vier in V 6 und V 7 erörterten Fälle eines Parabelhufs durchgeführt; die Grundflächen der den Differenzen der *Homoeoconica* das Gleichgewicht haltenden Spate sind

für einen Halbkreis:

$$\frac{1}{6} BC^2 - \frac{1}{30} BC^2 = \frac{2}{15} BC^2;$$

für ein Kreissegment mit der Sehne $\frac{3}{5} AC$:

$$\frac{3}{5} AC \left( \frac{3}{200} AC - \frac{63}{5000} AC \right) = \frac{3}{5} AC \cdot \frac{3}{1250} AC;$$

für das *segmentum hyperbolae condictum*:

$$\frac{26}{15} AC^2 - \frac{2}{3} AC^2 = \frac{16}{15} AC^2;$$

für das *alterum segmentum hyperbolae condictum*:

$$\frac{4}{7}AC\left(\frac{172}{5145}AC-\frac{4}{147}AC\right)=\frac{4}{7}AC\cdot\frac{32}{5145}AC.$$

Im Scholium steht, daß die Untersuchung der Summe zweier *Homoeoconica* (die der im Korollar 1 behandelten Differenz entspräche) keinen Fortschritt im Hinblick auf Lalouvères Zielsetzung bringt und dieser Fall deshalb nicht erörtert wird.

In V 9 zieht Lalouvère in dem beliebigen Dreieck $ABC$ (Abb. 67) die Seitenhalbierende $AD$ und teilt $BC$ durch den Teilpunkt $E$ im Verhältnis 5:3. Dann teilt die Parallele $GE$ zu $AC$ durch $E$ die Gerade $AD$ in $F$ so, daß

$$AF:FD=3:1$$

und

$$GF:FE=3:2$$

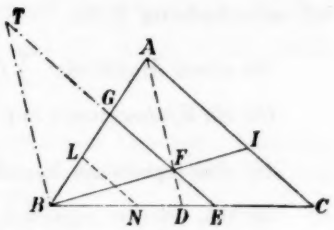

Abb. 67
(Entspr. Quadr. circ. S. 551).

ist. Im Korollar 1 steht, daß die Gerade $BF$, die $AC$ in $I$ trifft, jede Parallele zu $AC$ (zum Beipiel $LN$) wie 3:2 schneidet, während im Korollar 4 die Parallele zu $DA$ durch $B$ gezeichnet wird, die $EF$ in $T$ schneidet; dann ist

$$FT=AC$$

und

$$BT:DA=5:4,$$

wie sofort ersichtlich.

Lalouvère zeigt nun im Korollar 2, daß, wenn $ABC$ den Achsenschnitt eines Parabelhufs darstellt, der Schwerpunkt auf $IB$ liegt. (Man lasse in Abb. 65, S. 54, das Dreieck $YDB$ entsprechen; dann ist

$$YU:UB=3:2=AI:IC,$$

und der Schwerpunkt $P$ liegt auf $DU$.) Auf derselben Geraden $IB$ liegt auch der Schwerpunkt der in V 8 Korollar 1 besprochenen Differenz zweier *Homoeoconica* (Kor. 3).

Die Korollare 3 und 4 dieses Satzes finden sogleich Verwendung beim Beweis von V 10. Hier legt Lalouvère die Figur des Satzes V 5 (Abb. 65, S. 54) und die in V 8 Korollar 1 (S. 56) besprochene Differenz zweier *Homoeoconica* zugrunde, der durch einen Körper $i$ das Gleichgewicht gehalten wird. Lalouvère bestimmt $N_1$ auf $AC$ vermittels

$$AN_1:N_1C=3:5,$$

zieht durch $N_1$ die Parallele zu $AD$, die $BD$ in $O$ schneidet, und errichtet auf $N_1O$ in $N_1$ die Senkrechte $N_1T$ von der Länge des Lotes von $A$ auf $YB$. Wählt man dann $N_1T$ als Waage mit dem Drehpunkt $N_1$, so wird der besagten Differenz durch eine Kraft $s$ das Gleichgewicht gehalten, die sich zu $i$ wie 5 zu 4 verhält. Zum Beweis nimmt Lalouvère eine Kraft $x$ so an, daß

$$i:x=AD:\frac{5}{4}BD$$

ist, und zeigt dann unter Zuhilfenahme von V 1 (S. 50), V 9 Korollar 4 (siehe oben) und II 8 (S. 18—19), daß auch die Proportion

$$i:s=BD:\frac{5}{4}BD=4:5$$

gilt.

Im Korollar 1 zeigt Lalouvère, daß die Parallele zu $DA$ durch $T$ die Verlängerung von $BA$ in einem Punkte $F$ schneidet, so daß $FN_1 = AB$ ist. Im Korollar 2 werden die in V 8 Korollar 2 (S. 56) ermittelten Spate vom Rauminhalt $i$ in solche umgerechnet, die der Kraft $s$ gleich sind. Als Grundflächen dieser Spate ergeben sich wegen

$$s : i = 5 : 4$$

bei unveränderter Höhe

für einen Halbkreis: $\frac{1}{6} BC^2$;

für ein Kreissegment mit der Sehne $\frac{3}{5} AC$: $\frac{3}{5} AC \cdot \frac{3}{1000} AC$;

für das *segmentum hyperbolae condictum*: $\frac{4}{3} AC^2$;

für das *alterum segmentum hyperbolae condictum*: $\frac{4}{7} AC \cdot \frac{8}{1029} AC$.

In V 11 führt Lalouvère einen *alter cuneus notus* (im Unterschied zum *primus cuneus notus* aus IV 26, siehe S. 47) ein. In Anlehnung an die in V 10 benutzte Figur (S. 54) umfährt eine Parallele zu $NO$ die Kurve $MCL$, wodurch die Oberfläche eines *Cylindraceus* entsteht[90] (Abb. 68). Begrenzt man diesen erstens durch die Ebene $MCL$, zweitens durch die Ebene $DCE$, wobei $CE$ Tangente in $C$, also parallel zu $ML$ ist, so entsteht der *alter cuneus notus*. Gesucht ist ein Körper $g$, der in $F$ hängt und dem *alter cuneus notus* das Gleichgewicht hält, wobei die Waage $N$ als Drehpunkt besitzt[92]. Lalouvère behauptet dann, daß sich

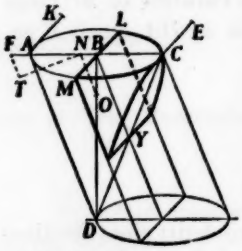

Abb. 68[91] (Entspr. Quadr. circ. S. 562).

$$g : s = 3 : 2 \tag{29}$$

verhält, wobei $s$ der in V 10 eingeführte Körper ist.

Der Hauptpunkt des Beweises ist die Bemerkung, daß sich die Schnitte von *alter cuneus notus* und Hufdifferenz gemäß II 8 Korollar (S. 19) wie 3 zu 2 verhalten, wenn die schneidende Ebene parallel zu $DAK$ verläuft.

Im Korollar 1 werden die Grundflächen der in V 10 Korollar 1 ermittelten, der Kraft $s$ raumgleichen Spate gemäß (29) in Grundflächen von Spaten mit gleicher Höhe und vom Rauminhalt $g$ umgerechnet, wobei sich folgende Grundflächen ergeben:

Für einen Halbkreis: $\frac{1}{4} BC^2$;

für ein Kreissegment mit der Sehne $\frac{3}{5} AC$: $\frac{3}{5} AC \cdot \frac{9}{2000} AC$;

für das *segmentum hyperbolae condictum*: $2\, AC^2$;

für das *alterum segmentum hyperbolae condictum*: $\frac{4}{7} AC \cdot \frac{4}{343} AC$.

Im Korollar 2 sagt Lalouvère, daß die dem *alter cuneus notus* das Gleichgewicht haltende Kraft $\frac{3}{8}$ des *cuneus* beträgt, wenn der Waagebalken (siehe umstehend V 10)

---

[90] Es sei hier bemerkt, daß Lalouvère — im Gegensatz zum heutigen Sprachgebrauch — nur bei kreisförmiger Grundfläche von „Zylinder" spricht, sonst von *Cylindraceus* (oder „Zylindroid": IV 18 Kor. 4, S. 43). Entsprechend unterscheidet er „Kegel" und *Homoeoconicum* (IV 12 Kor. 2, S. 42).

[91] Diese sowie die Abbildung 65 (S. 54) entsprechen dem Fall, daß $MCL$ eine Halbellipse ist.

[92] Die Punkte $F$ und $N$ werden wie in V 10 bestimmt; $N$ entspricht dort dem Punkte $N_1$.

$AC$ durch $N$ im Verhältnis 3:5 geteilt wird. Ist speziell der *cuneus* ein Halbzylinder, so beträgt die „Kraft" $\frac{3}{16}$ dessen, wie Lalouvère unter Hinweis auf Euklid[93] dartut.

Im Scholium sagt Lalouvère zunächst, daß der *Cylindraceus* ohne Beschränkung der Allgemeinheit als gerade angenommen werden kann, was im folgenden stets geschehen soll. Ferner wird dargetan, daß, wenn $MCL$ ein Drittelkreis ist, die Grundfläche des dem *cuneus* das Gleichgewicht haltenden Spats ein Rechteck aus $CL$ und $\frac{3}{64}AC$ ist, wobei $CL = \frac{1}{4}AC\sqrt{3}$ ist.

In V 12 wird ein *cuneus medius* kubiert; darunter versteht Lalouvère folgenden Körper: Gegeben ist (Abb. 69) eine Ellipse oder Hyperbel mit der Hauptachse $AC$ und dem Mittelpunkt $B$; $BL$ ist halbe Nebenachse. Auf der Ebene des Kegelschnitts stehe die Ebene $ADC$ senkrecht, und es sei

$$NB = \frac{1}{4}AB. \tag{30}$$

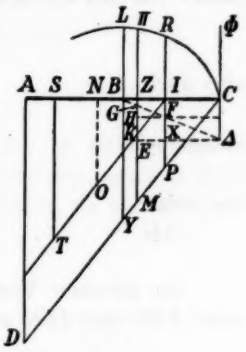

Abb. 69
(Entspr. Quadr. circ. S. 569).

Über dem Kegelschnitt $CL$ als Grundfläche werde ein (gerader) *Cylindraceus* errichtet. Man wähle auf $BC$ rechts von $B$ einen beliebigen Punkt $I$ und ziehe $IT$ parallel $CD$, so daß der *angulus internus* („Innenwinkel") $AIT$ und der *angulus externus* („Außenwinkel") $CIT$ entstehen. $IR$ ist parallel $BL$, und die einander parallelen Ebenen $TIR$ und $DC\Phi$ (wobei $C\Phi$ Scheiteltangente ist) schneiden den *Cylindraceus*. Während dann $ACD$ Achsenschnitt eines *alter cuneus notus* (V 11, S. 58) ist, ist $AIT$ (beziehungsweise $CIT$) Achsenschnitt eines *cuneus medius*. Grenzt man den *cuneus medius* gegen $A$ durch die Ebene $YBL$ ab, so soll ein durch zwei „Querebenen" (siehe S. 47) abgeschnittener Teil des *cuneus medius* kubiert werden.

Genauer: Lalouvère bestimmt $S$ vermittels

$$BI : BC = BN : BS, \tag{31}$$

wählt $Z$ als Durchstoßpunkt der Hauptachse durch die eine Querebene und zieht $ZM$, $IP$, $C\Delta$ parallel zu $BY$. Ferner wird $F$ bestimmt durch

$$IF = \frac{1}{4}IP \tag{32}$$

und $X$ durch

$$BI : BC = IF : IX. \tag{33}$$

Die Parallele zu $AC$ durch $X$ schneidet $ZM$ und $C\Delta$ in $E$ und $\Delta$. Lalouvère behauptet dann, daß mit $S$ als Drehpunkt der *cuneus medius* $IZK$[94] einer Kraft

$$\varepsilon = \delta - (\alpha + \beta)$$

das Gleichgewicht hält. Dabei ist $\delta$ die Kraft, die nach V 11 dem *alter cuneus notus* $MPIZ$ das Gleichgewicht hält (Drehpunkt $N$), während die Kräfte $\alpha$ und $\beta$ nach IV 25 (S. 47) den *Cylindracei* $MPIK$ und $EXIZ$ das Gleichgewicht halten (Drehpunkt $B$). Diese Behauptung entspricht dem Fall, daß

[93] Euklid[20]: *Elemente* XI 23.

[94] Zur Schreibweise vergleiche V 5 Scholium, S. 55.

1. die Querebenen bei der Ellipse[95] den Innen-, bei der Hyperbel den Außenwinkel schneiden, wobei bei der Ellipse $I$ zwischen $B$ und $C$, bei der Hyperbel $C$ zwischen $B$ und $I$ liegt.

Außerdem erörtert Lalouvère noch die beiden Möglichkeiten, daß

2. die Querebenen bei der Ellipse den Außen-, bei der Hyperbel den Innenwinkel schneiden, wobei die Lage von $I$ wie oben ist;

3. bei der Ellipse $C$ zwischen $B$ und $I$, bei der Hyperbel $I$ zwischen $B$ und $C$ liegt, und stellt die entsprechenden Behauptungen auf.

Der Beweis verläuft im Falle 1. folgendermaßen: Es sei $ZH = IF$ und $G$ der Schnittpunkt von $B\Delta$ mit $ZM$. Dann ist zunächst

$$\Delta X : XE = EH : HG,$$

also auch

$$CI : IZ = EH : HG,$$

andererseits

$$CI : IZ = KM : ZK,$$

das heißt

$$GH : ZK = HE : KM. \tag{34}$$

Im gleichen Verhältnis stehen aber, da die Grundflächen übereinstimmen, die *cunei* $FHG$ und $IZK$ und auch die *Cylindracei* $EXFH$ und $MPIK$, weil wegen (34)

$$FHG : IZK = XF : PI = EXFH : MPIK \tag{35}$$

ist. Nun folgt aus (31) und der Ähnlichkeit der Dreiecke $BIF$ und $BC\Delta$

$$BN : SN = IF : XF$$

und aus (39) und (32)

$$AB : BN = PI : IF,$$

also wegen (35)

$$AB : SN = PI : XF = IZK : FHG. \tag{36}$$

Bezeichnet man nun die Rauminhalte $IZK$, $MPIZ$, $MPIK$ und $EXIZ$ mit $V$, $V_1$, $V_2$ und $V_3$, so daß also $V = V_1 - V_2$ ist, nennt die von $B$ aus gerechnete Schwerpunktsabszisse dieser Körper $\xi$, weshalb $BI = 2\xi$ wird, und setzt $AB = 4a$, so ergibt sich $BN = a$ und

$$BS = \frac{2a^2}{\xi},$$

und die Behauptung lautet:

$$4a \cdot \varepsilon = 4a(\delta - \alpha - \beta) = (BS + \xi) \cdot V. \tag{37}$$

Das sieht man so ein: Da $\alpha$ die zu $V_2$ gehörige Kraft ist, ergibt sich für den Drehpunkt $B$

$$4a \cdot \alpha = \xi \cdot V_2,$$

also für den Drehpunkt $N$

$$4a(\alpha + HFIZ) = (a + \xi) \cdot V_2,$$

[95] Dieser Fall ist in Abbildung 69 dargestellt.

da nach (32) $HFIZ = \frac{1}{4} V_2$ ist. Nun ist aber nach IV 26 (S. 47) die zu $V_2$ gehörende Kraft

$$\beta = GFIZ = HFIZ - FHG,$$

so daß

$$4a(\alpha + \beta + FHG) = (a + \xi) \cdot V_2 \tag{38}$$

entsteht. Nach Definition ist

$$4a \cdot \delta = (a + \xi) \cdot V_1. \tag{39}$$

Subtrahiert man im Hinblick auf (36) die Gleichung (38) von (39), so erhält man

$$\begin{aligned} 4a(\delta - \alpha - \beta) &= (a + \xi)(V_1 - V_2) + 4a \cdot FHG \\ &= (a + \xi) \cdot V + (BS - a) \cdot V, \quad [\text{nach } (36)] \\ 4a \cdot \varepsilon &= (BS + \xi) \cdot V; \end{aligned}$$

also ist (37) bewiesen.

Ganz ähnlich verlaufen die Beweise der anderen beiden Fälle (S. 60). — Man erkennt, mit welcher Geschmeidigkeit Lalouvère das Hebelgesetz anwendet, wenn er durch Verlagerung des Drehpunkts die Momente umformt, — ein Verfahren, zu dem übrigens der Grund in II 10 (S. 20) gelegt ist.

Während im Korollar steht, daß

$$IB \cdot BS = \frac{1}{16} AC^2$$

ist — der Beweis ergibt sich sofort unter Benutzung von (31) —, enthält das Scholium die Bemerkung, der in V 12 ausgeschlossene Fall (siehe S. 59—60), daß die Querebenen links von $B$ liegen, werde durch V 13 Korollar 1 erledigt.

Hier mögen gleich die Sätze V 14 und V 15 angeschlossen werden, die Sonderfälle von V 12 darstellen, und zwar ist die Ellipse jedesmal ein Kreis vom Durchmesser $AC$, $S$ ist Drehpunkt und der Kraftarm hat die Länge $AB$. Die Fälle 1. und 2. (S. 60) finden Erledigung in V 15, wo es sich um die Kubatur der Abschnitte $BUI$ und $CQI$ der *cunei medii* $NOI$ und $STI$ handelt (siehe Abb. 69, S. 59). Dabei fallen die Punkte $B$ und $Z$ zusammen, und es ist $BS = BI = IC$.

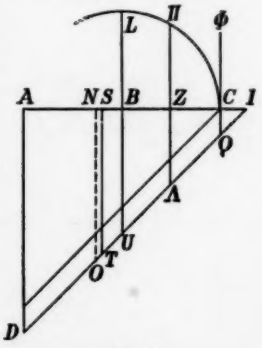

Abb. 70
(Entspr. Quadr. circ. S. 574).

In V 14[96] wird der 3. Fall von V 12 spezialisiert. Hier ist (Abb. 70) $BI = \frac{5}{4} BC$, $BS = \frac{1}{5} BC$, und die Querebenen $\Lambda Z \Pi$ und $QC\Phi$ schneiden ein Drittel des Kreisumfangs heraus, so daß $BZ = CZ$ wird. Dann gilt:

a) Die Kraft zu dem *cuneus* $Z\Lambda QC$ ist ein Spat von der Höhe $AD$, dessen Grundfläche ein Rechteck aus der halben Seite des dem Kreise um $B$ einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und aus $\frac{27}{160} AC$ ist.

b) Fällt $Z$ mit $B$ zusammen, so ist die zum *cuneus* $Z\Lambda QC = BUQC$ gehörige Kraft ein Spat von der Höhe $AD$ und der Grundfläche $\frac{7}{20} BC^2$.

[96] Hier ist eine falsche Figur eingerückt: es gehörte auf Seite 588 die von Seite 574 (nicht die von Seite 600, wie geschehen).

Die Beweise zu V 14 und V 15 bringen gegenüber dem zu V 12 (S. 60—61) keine neuen Gesichtspunkte und mögen deshalb erspart bleiben; sie benutzen im wesentlichen den Satz IV 25 (S. 47)[97].

Wichtig ist nun V 13, wo Lalouvère einen *Dicylindraceus* berechnet, worunter er einen von zwei Zylinderflächen begrenzten Körper versteht; er werde der Deutlichkeit halber im Grund- und Aufriß wiedergegeben (Abb. 71). Gegeben ist die geschlossene Kurve *AMCL* mit der Symmetrieachse *AC*. Auf der durch diese (ebene) Kurve bestimmten Ebene steht im Punkte *N* (wobei $AN:NB=3:1$) *ND* senkrecht, und durch Parallelen zu *ND*, die die gegebene Kurve umfahren, entsteht ein *Cylindraceus*. Man wähle $CF=NB$ und errichte in *F* die Senkrechte *FE*, die gleich *ND* und ihr parallel ist. Dann mögen durch die Ebenen *ENQ* und *DFG* zwei Hufe *DFN* und *EFN* (*cunei coniugati*) gebildet werden.

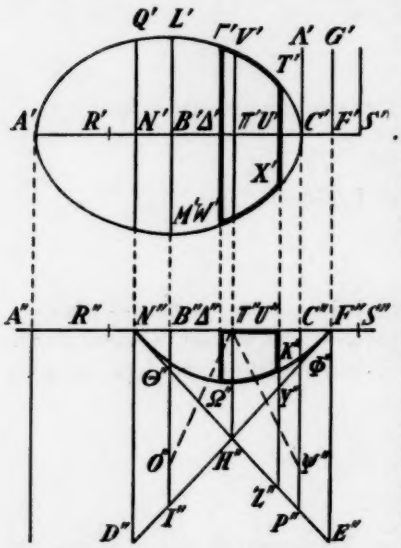


Abb. 71 (Entspr. Quadr. circ. S. 579).

Schneidet man aus den beiden Hufen durch dieselben zwei zu *DNQ* parallelen Ebenen Teile heraus, so lassen sich die Hufteile durch denselben Körper im Gleichgewicht halten. Dieser Körper ist der *Dicylindraceus*, und zwar wird er durch die Parabel *NKF* gewonnen, die *NE* und *FD* zu Tangenten hat: die eine Zylinderfläche erhebt sich über *WXTΓ*, die andere über *ΩKUΔ*; die zu *DNQ* parallelen Seitenflächen sind Rechtecke, so daß der *Dicylindraceus* von je drei ebenen und krummen Flächen begrenzt wird.

Zwecks analytischer Darstellung (auf den Beweis von V 13 komme ich im § 9 zurück) wähle man *BC* als $x$-Achse, *BM* als $y$-Achse und die auf *BMC* in *B* errichtete Senkrechte als $z$-Achse eines rechtwinkligen cartesischen Systems. Sind dann $y$ und $z$ die Ordinaten der Kurven *ALC* und *NKF*, so ergibt sich als Rauminhalt des *Dicylindraceus*

$$V=\int_{x_1}^{x_2} 2yz\,dx.$$

(Ist im besonderen *ALC* ein Halbkreis mit dem Radius $r$, also

$$y^2=r^2-x^2,$$

so hat die Parabel *NKF* die Gerade $x=\frac{1}{2}r$ zur Achse und daher die Gleichung

$$z=x^2-rx-\frac{5}{16}r^2.)$$

Die *cunei coniugati* lassen sich leicht ermitteln; denn die Erzeugenden *NE* und *FD* sind ja Tangenten an die Parabel *NKF*.

Von den Korollaren besagt das erste, daß der in V 12 Scholium (S. 61) ausdrücklich ausgenommene *cuneus CNP* als dem *Dicylindraceus* raumgleich kubiert werden kann, wobei bei beiden Körpern durch dieselben Querebenen Teile herausgeschnitten werden. Im Korollar 2 wird gefolgert, daß für den Fall, daß *MCL* ein Halbkreis oder ein

[97] Es sei darauf hingewiesen, daß Lalouvère den Beweis von V 15 zum erheblichen Teil in der *Appendix* berichtigen mußte (*Quadr. circ.* S. 621—24).

*segmentum hyperbolae condictum* ist, der von den durch $B$ und $C$ gelegten Querebenen abgeschnittene Teil des *cuneus* $CNP$ mit einem Spat ins Gleichgewicht gebracht werden kann, dessen Grundflächen den betreffenden Fällen von V 11 Korollar 1 (S. 58) entsprechen. Somit kann, wie Lalouvère im Korollar 3 feststellt, eine sehr große Zahl von *Dicylindracei* kubiert werden, und dieser Vorgang sei *quasi aurora adventantis quadraturae circuli*[98]; denn jeder *alter cuneus notus* (V 11, S. 58) könne sowohl mit einem Zylinder von gleicher Höhe als auch mit einem *Dicylindraceus* ins Gleichgewicht gebracht werden, man brauche also bloß vom Rauminhalt raum- und höhengleicher Körper auf die Grundfläche zu schließen, um zur Kreis- und Hyperbelquadratur zu gelangen. Im Korollar 4 führt Lalouvère die in V 16 und V 17 zur Verwendung gelangenden *cunei laterales* ein: Die Differenz der „Kräfte", die den durch die Querebenen $OBL$ und $PC\Lambda$ begrenzten *cunei coniugati* $EFN$, $DFN$ das Gleichgewicht halten, ist gleich der Differenz der den *cunei* $P\Phi H$ und $IH\Theta$ entsprechenden „Kräfte"; diese Hufe nennt Lalouvère *cunei laterales primi* (= *collaterales*, wenn er ihr gegenseitiges Verhältnis meint). Schneidet man von $BI$ und $CP$ die Stücke $BO = \Theta I$ und $C\Psi = \Phi P$ ab und zieht die Ebene $H\Pi V$, so schneiden die Ebenen $O\Pi V$ und $\Psi\Pi V$ die *cunei laterales secundi* (= *collaterales*, siehe oben) $O\Pi B$ und $\Psi C\Pi$ heraus. Schließlich ist auch der im Korollar 5 dargelegte Gedankengang für das folgende von Bedeutung: Nach IV 26 (S. 47) kann ein durch Querebenen abgeschnittener Teil des *cuneus* $EFN$ ins Gleichgewicht gebracht werden mit dem durch dieselben Querebenen begrenzten Teile eines *Cylindraceus* von der Höhe $\Pi H$. (Drehpunkt und Aufhängungen sind hierbei besonders gewählt.) Andererseits ist der *Cylindraceus* nach IV 25 (S. 47) im Gleichgewicht mit einem Spat von gleicher Höhe und einer Grundfläche, die gleich der der *Cylindraceus*grundfläche entsprechenden „Kraft" ist. Dann schließt Lalouvère, daß die Rauminhalte von Huf und Spat übereinstimmen; verwandelt man zudem den Huf in einen Spat von der Höhe $\Pi H$, so ist dessen Grundfläche gleich der schon erwähnten „Kraft".

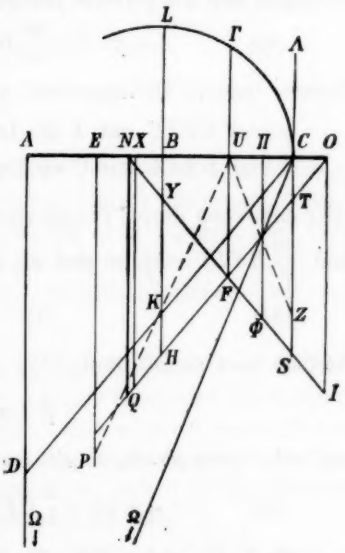

Abb. 72 (Entspr. Quadr. circ. S. 600).

In den beiden letzten Sätzen des Buches und Werkes greift Lalouvère den in V 13 Korollar 3 entwickelten Gedankengang auf, indem er sich in V 16 vornimmt, *invenire et calculo colligere aequalitatem inter duo quaedam spatia solida multum inservientem ad quadrandum circulum*[99]. In V 17[100] will er dann *invenire et calculo colligere aequalitatem inter duo quaedam spatia plana proxime conducentem ad circuli quadraturam*[101].

In V 16 ist der Halbkreis $MCL$ Grundfläche eines *Cylindraceus*, der durch Bewegung einer Parallelen zu $NQ$ entsteht (die Figur entspricht — mit teilweise anderen Bezeichnungen — den Lageverhältnissen von V 13, siehe Abb. 71, S. 62). $NQ$ steht auf dem Kreisdurchmesser $AC$ senkrecht, $B$ ist Kreismittelpunkt und ferner ist

$$BU = BE = \frac{1}{2}BC,\ BN = CO = \frac{1}{4}BC,\ BX = \frac{1}{5}BC \text{ (Abb. 72).}$$

[98] *Quadr. circ.* S. 583, Zeile 6—5 von unten.
[99] *Quadr. circ.* S. 600, Zeile 2—6 von oben.
[100] Bei Lalouvère irrtümlich nochmals V 16 (nicht berichtigt).
[101] *Quadr. circ.* S. 607, Zeile 4—1 von unten.

$F$ ist ein beliebiger Punkt auf der Parallelen zu $NQ$ durch $U$. Man verbindet $F$ mit $N$ und $O$ und erhält die mit $U$ zu verbindenden Punkte $K$ und $Z$ auf $BH$ und $CS$ gemäß V 13 Korollar 4. Dann sind $NQO$ nnd $NIO$ die *cunei coniugati* (S. 62), $YFH$ und $TFS$ die *cunei collaterales primi* (S. 63), $BUK$ und $CUZ$ die *cunei collaterales secundi* (ebenda) und $BYFTC$ das *solidum fastigiatum*, dessen *pars interior* $BYFU$ und dessen *pars exterior* $UFTC$ ist. Als Querebenen werden $HBL$ und $SCA$ genommen. Lalouvère führt nun die Körper $\sigma$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ als „Kräfte" für die genannten *cunei* ein, wählt den Kraftarm stets von der Länge $AB$, transformiert gemäß II 10 (S. 20) alle Momente auf $E$ als Drehpunkt und gewinnt so je ein *primum* und *secundum fastigiati aequiponderans*; durch deren Gleichsetzen entstehen die gewünschten *spatia solida*.

Im einzelnen: Gleichgewicht besteht zwischen

$\sigma$ und $(YFH+TFS)$ beziehungsweise $(BUK+CUZ)$ mit $E$ als Drehpunkt (gemäß V 15, S. 61),

$\alpha$ und $BHTC=(BYFU+UFTC+YFH)$ mit $X$ als Drehpunkt [gemäß V 14 b), S. 61],

$\beta$ und $BYSC$ mit $C$ als Drehpunkt (gemäß V 11 Kor. 1, S. 48).

Transformiert man die letzten beiden „Lasten" auf den Drehpunkt $E$, so erhält man die Gleichgewichtskräfte

$$\left(\alpha+\frac{6}{20}BHTC\right) \text{ und } \left(\frac{30}{20}BYSC-\beta\right).$$

So ergibt sich als *primum fastigiati aequiponderans*

$$\alpha-\beta-\sigma+\frac{36}{20}BYFU+\frac{36}{20}UFTC+\frac{6}{20}YFH+\frac{30}{20}TFS. \tag{40}$$

Ebenso besteht Gleichgewicht zwischen

$\gamma$ und $UFTC$ mit $X$ als Drehpunkt [gemäß V 14a), S. 48],

$\delta$ und $BYFU$ mit $C$ als Drehpunkt (gemäß V 15, S. 48).

Hier entstehen durch Transformation auf den Drehpunkt $E$ die „Kräfte" $\left(\gamma+\frac{6}{20}UFTC\right)$ und $\left(\frac{30}{20}BYFU-\delta\right)$, so daß als *secundum fastigiati aequiponderans* folgt

$$2\gamma-2\delta+\frac{60}{20}BYFU+\frac{12}{20}UFTC. \tag{41}$$

Addiert man zu (40) und (41)

$$\beta+\sigma+\delta-\frac{36}{20}BYFU-\frac{12}{20}UFTC$$

und setzt dann gleich, so gilt für die *spatia solida*:

$$\alpha+\sigma+2\delta+\frac{6}{5}UFTC+\frac{3}{10}YFH+\frac{3}{2}TFS=2\gamma+\beta+\frac{6}{5}BYFU. \tag{42}$$

In V 17 (siehe Abb. 72, S. 48) wählt Lalouvère $N\Pi=BC$, $\Pi\Phi$ parallel zu $NQ$ und legt durch $\Phi$ eine zu $MCL$ parallele Ebene, wodurch ein *Cylindraceus* von der Höhe $\Pi\Phi$ entsteht. Wählt man dann als Querebenen $HBL$ und $FU\Gamma$, $N$ als Drehpunkt und den Kraftarm gleich $BC$, dann ist die dem *Cylindraceus* das Gleichgewicht haltende „Kraft" nach V 13 Korollar 5 gleich dem Teil $BYFU$ des *cuneus coniugatus* $NIO$, sofern die Grundflächen übereinstimmen. Setzt man nun $BYFU$ gleich einem Spat $\varepsilon$ von der Höhe $\Pi\Phi$, so ist die Grundfläche von $\varepsilon$ im Gleichgewicht mit der von $BYFU$, so daß $\frac{6}{5}\varepsilon$ bei gleicher Höhe $\Pi\Phi$ eine Grundfläche gleich $\frac{6}{5}$ der „Kraft" hat, die der Grundfläche von $BYFU$ das Gleichgewicht hält.

In gleicher Weise zeigt Lalouvère für die *cunei* $UFTC$, $BUK = YHF$ und $CUZ = FST$, daß bei gleichbleibender Höhe der zugehörigen Spate sich die Grundflächen im Verhältnis der Rauminhalte ändern, und erledigt so auch die anderen mit einem Zahlenfaktor versehenen Größen von (42). Wenn nun noch die Spate $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ von der Höhe $AD = EP = 2\Pi\Phi$ und der Spat $\sigma$ mit der Höhe $A\Omega = 4\Pi\Phi$ auf solche der Höhe $\Pi\Phi$ reduziert werden, wobei sich die Grundflächen verdoppeln bzw. vervierfachen, so hat man alle *spatia solida* von V 16 auf dieselbe Höhe gebracht, kann also gemäß V 13 Korollar 3 bei gleichem Rauminhalt auf gleiche Grundflächen schließen. So erhält man die einander gleichen *spatia plana*, und zwar besteht der *primus terminus aequalitatis notae* aus

2 Grundflächen des Spats $\alpha$,

4 Grundflächen des Spats $\delta$,

$\frac{6}{5}$ der „Kraft", die der Grundfläche von $UFTC$ das Gleichgewicht hält, entsprechend

$\frac{3}{2}$ der „Kraft" zur Grundfläche von $CUZ$ ($= TFS$),

$\frac{3}{5}$ der „Kraft" zur Grundfläche von $BUK$ ($= YFH$).

Der *secundus terminus aequalitatis notae* umfaßt

4 Grundflächen des Spats $\gamma$,

2 Grundflächen des Spats $\beta$,

4 Grundflächen des Spats $\sigma$,

$\frac{6}{5}$ der „Kraft" zur Grundfläche von $BYFU$.

Im Scholium sagt Lalouvère abschließend, daß er die vorstehenden beiden *termini* auf zwei Größen zurückführen wollte, deren eine ein ebenes Vieleck bekannten Inhalts und deren andere ein Kreisabschnitt ist. Aber die Rechnung habe ergeben, daß beide *termini* auf geradlinig begrenzte ebene Flächen führen. So habe er zwar sein Ziel nicht erreicht, glaube aber dennoch einen „Zipfel" (*lacinia*) der Lösung in den Händen behalten zu haben. —

Wir Heutigen wissen, daß dieser Versuch der Quadratur des Kreises wie alle anderen zeitgenössischen (und späteren) Versuche scheitern mußte. Daher beurteilen wir derartige Werke nicht danach, ob der Verfasser sein Hauptziel erreicht hat, sondern was er zu diesem Behuf an mathematischen Sätzen und Methoden ersonnen hat und wieweit er im Zeitalter einer beginnenden Lockerung mathematischer Strenge an dem von den Griechen überkommenen Ideal wissenschaftlicher Bündigkeit festgehalten hat.

Wenn man, wie bei den vorhergehenden Büchern, auch hier eine Zusammenstellung des mathematisch Wesentlichen geben will, muß man das ganze Buch herausstellen: Nimmt man die Berechnung der Kreis- und Hyperbelabschnitte in V 2 und V 3, das *Homoeoconicum* in V 4, die *Homoeoconica condicta* in V 5 bis 10 (insbesondere den Parabelhuf in V 5 bis 7), den *cuneus medius* in V 12, V 14 und V 15, den *Dicylindraceus* in V 13 und schließlich die Schlußkubaturen in V 16 und V 17 — alles ist interessant und durchaus originell. Man muß immer wieder staunen, mit welchem Spürsinn es Lalouvère gelingt, rational erfaßbare Körperabschnitte zu finden, in wie hohem Maße er die antiken Methoden für komplizierte Gebilde fruchtbar zu machen versteht.

## § 9. Zusammenfassung und Würdigung.

Sehen wir zunächst, wie Lalouvère selbst seine Ergebnisse einschätzt und sich mit zeitgenössischen Mathematikern wie Cavalieri, Gregorius a. S. Vincentio, Guldin, Torricelli und Valerio auseinandersetzt. Quelle hierfür ist vornehmlich die *Appendix secunda* (siehe auch S. 4—5).

I. Lalouvère bezeichnet im besonderen als sein geistiges Eigentum:

1. Die Teilung eines zweischaligen Drehhyperboloids nach einem gegebenen Verhältnis (IV 15 Kor. 3, S. 42).

2. Die Berechnung des Rauminhalts eines einschaligen Drehhyperboloids („Xystroids": IV 23 Kor. 3, S. 46; V 3 Schol. alt., S. 52).

3. Die Bestimmung des Schwerpunkts eines einschaligen Drehhyperboloids (IV 27 Schol., S. 48; V 3 Schol. alt., S. 52).

4. Die Teilung auch eines einschaligen Drehhyperboloids, die entsprechend IV 12 Kor. 4, IV 13 Kor. 5, IV 14 Kor. 4 , IV 15 Kor. 3 erfolgen könne (S. 42).

Diese Ergebnisse findet Lalouvère weder bei Valerio[24] noch, soweit ihm bekannt, bei anderen Mathematikern geleistet.

II. Lalouvère hat — entgegen anderweitigen Behauptungen — in den folgenden Schriften Torricellis[102]: *De sphaera et solidis sphaeralibus libri duo, De dimensione parabolae, De solido hyperbolico acuto cum appendicibus de cycloide et cochlea*[103], *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* nichts davon gefunden, daß Torricelli die Quadratur von Kreis-, Ellipsen- und Hyperbelsegmenten mittels einer im Mittelpunkt dieser Figuren aufgehängten Waage vorgenommen habe; hierbei sei der Ton auch darauf zu legen, daß es sich wirklich um beliebige Segmente, nicht nur um Halbkreise handelt.

III. Die *ungula* des Gregorius a. S. Vincentio, die von diesem in sehr mühsamer Weise ohne Waage berechnet wird[15], erledigt Lalouvère mit Hilfe der Waage leicht in IV 25 und IV 26 (S. 47); sie heißt bei ihm *primus cuneus notus*. Außerdem gelingt Lalouvère die Kubatur des Stumpfes (*frustum*) eines *cuneus*. Ein *alter cuneus notus* wird in V 11 (S. 58) betrachtet; mit seiner Hilfe gelange man fast bis zur erstrebten Kreisquadratur (V 13 Kor. 3, S. 63). Übrigens fügt Lalouvère hier — ohne Begründung — durch Randdruck zu, daß ihm während der Drucklegung des Buches V die Erkenntnis gekommen sei, daß die Kreisquadratur auch ohne Schwerpunktsbetrachtungen durchführbar sei, obgleich nicht ohne Waage.

IV. Interessant und wichtig ist Lalouvères Auseinandersetzung mit Cavalieri, dessen Prinzip der Körpervergleichung[104] Lalouvère, wie er behauptet, unabhängig von Cavalieri gefunden hat (IV 11, S. 40). Nach Lalouvère stellt sich die Angelegenheit folgendermaßen dar: Cavalieri veröffentlicht 1635 zwei Regeln (siehe auch S. 5) zur Berechnung von Flächeninhalten ebener Figuren, die sich leicht auf Rauminhalte von

---

[102] E. Torricelli[26]: *Opere* I 1—230, II 101—232.

[103] Hier hat Torricelli das *solidum hyperbolicum acutum* eingeführt, vergleiche H. Wieleitner: *Mathematische Quellenbücher*, Band IV. Berlin 1929, S. 78—82. Lalouvère sagt übrigens, daß er diesen Körper mittels IV 23 (S. 45—46) hätte erledigen können und weist in diesem Zusammenhang noch auf die (bereits in seinem *Tractatus de principiis librae* [siehe S. 2] geleistete) Quadratur der Fläche zwischen einem Hyperbelast und der zugehörigen Asymptote (vergleiche IV 4, S. 39) hin, obwohl hier kein Schwerpunkt bestimmt werden könne.

[104] Daß auch die Schwerpunkte raumgleicher Körper von gleicher Grundfläche und Höhe in derselben zur Grundfläche parallelen Ebene liegen, steht bei Cavalieri nicht.

Körpern übertragen lassen[27]. Diese Methode Cavalieris, der übrigens selbst zugibt, besonders von Kepler[88] angeregt worden zu sein, findet die begeisterte Zustimmung Torricellis, der sie im Gegensatz zur Methode der Alten den „Königsweg"[105] der Mathematik nennt. Andere Mathematiker, vor allem Guldin[106], setzen der Richtigkeit der Regeln Zweifel entgegen, so daß sich Cavalieri 1647 zu einer nochmaligen, deutlicheren Darstellung seiner Gedanken veranlaßt sieht[25]. Hier lauten die Regeln:

1. *Si in duabus quibuscumque figuris planis etiam non in eadem latitudine existentibus omnes lineae unius figurae cuidam signatae parallelae mente descriptibiles et collective sumpte fuerint aequales omnibus lineis alterius figurae cuicumque signatae parallelis mente descriptibilibus et collective sumptis, etiam ipsae figurae erunt aequales, et contra.*

2. *Si in duabus quibuscumque figuris planis in iisdem parallelis constitutis singulae lineae istis parallelae cum singulis lineis in directum existentibus collocatae fuerint aequales, etiam ipsae figurae erunt aequales.*

Beide Regeln werden dann auf um eine Dimension höhere Gebilde übertragen, wodurch die Flächen also in Körper und die Geraden in Ebenen übergehen.

Cavalieri unterscheidet seine Methode von der der Alten, wie sie vor allem Euklid und Archimedes[107] entwickelten. Wichtig sind die *reductio ad impossibile* und der Exhaustionsbeweis. Die alte Methode ist zuverlässiger, weshalb Cavalieri sie für schwierigere Fälle (*Exercitatio* III, Kap. 11; *Exercitatio* V, Kap. 8 und 10) heranzieht. Und Torricelli erinnert in der *Appendix* seiner genannten Schrift *De solido hyperbolico acuto* daran, daß die Indivisibeln-Methode auf das apagogische Verfahren der Alten zurückgeführt werden könne.

Wie äußert sich nun Lalouvère selbst zu Cavalieris Regeln? Während Lalouvère die zweite Regel als mit seinem Satz IV 11 (S. 40) gleichwertig erkennt, hält er die erste Regel nur dann für anwendbar, wenn die Parallelen gleichen Abstand von der Grundlinie haben. Andernfalls könnten falsche Ergebnisse entstehen, was Lalouvère am Beispiel des Satzes III 14 (S. 32) dartut. Wiederum gibt es auch Gegenbeispiele (Lalouvère zieht I 6, siehe S. 8—9, heran), bei denen trotz ungleicher Indivisibeln gleiche Flächeninhalte entstehen. Auch Torricellis Zykloidenquadratur gehöre hierher. Prüfstein ist in solchen Fällen die *reductio ad impossibile*, vergleiche I 16 (S. 12) und III 14. Übrigens scheine auch Cavalieri selbst seiner ersten Regel gegenüber ein gleiches unsicheres Gefühl gehabt zu haben; denn er schreibt am Ende der *Exercitatio* V unter Bezugnahme auf Guldins Einwände, daß die Gültigkeit dieser Regel gegebenenfalls in Anlehnung an Archimedes geprüft werden müsse.

Lalouvère hält — damit wollen wir die Auswertung der *Appendix secunda* beschließen[108] — auch seine Methode, die *armis et apparatu veterum*, jedoch *adiumento librae Archimedae et a materia divulsae* arbeitet, für einen „Königsweg". —

---

[105] Vergleiche das Wort, das Euklid dem König Ptolemaios Philadelphos von Ägypten gesagt haben soll: „*Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἄτραπον πρὸς γεωμετρίαν*".

[106] Es erscheint bemerkenswert, daß Lalouvère von seinem Ordensgenossen Guldin (im Gegensatz etwa zu dem Jesuaten Cavalieri) immer nur als von „unserem Guldin" (*Guldinus noster*) spricht.

[107] Man beachte jedoch die erst 1906 aufgefundene Methodenlehre des Archimedes; vergleiche J. L. Heiberg - H. G. Zeuthen: *Eine neue Schrift des Archimedes*, Bibliotheca Mathematica (3) 7 (1906—07), S. 321ff.

[108] Ich möchte der Vermutung Raum geben, daß die *Appendix secunda* dem Werke später angehängt wurde. Denn: 1. Im Vorwort *Ad lectorem* ist nur von *einer* Appendix die Rede: *Rogo te, benevole lector, ut ... inspicias utrum aliquid ... adiecerim in appendice.* 2. Dieser Anhang heißt einfach *Appendix* (nicht ... *prima*, siehe *Quadr. circ.* S. 615) und endet mit *Finis* (ebenda S. 624). 3. Die *Appendix secunda* ist nicht paginiert.

Wir fragen nun, welche Bausteine Lalouvère für das Werden der Mathematik geliefert hat, und zwar wollen wir dabei die Ergebnisse und die Methoden trennen.

Von den Ergebnissen ist in erster Linie die Ermittlung von Rauminhalt und Schwerpunkt eines einschaligen Drehhyperboloids zu nennen (IV 23 Kor. 3, S. 46; IV 27 Schol., S. 48; V 3 Schol. alt., S. 52). Archimedes[19] hatte sich auf solche aus Kegelschnitten entstandenen Drehkörper beschränkt, die durch Drehung um die Hauptachse hervorgerufen werden.

Dann seien diejenigen Körper genannt, die als zu einem Kegel, Drehparaboloid, Drehellipsoid, zweischaligem Drehhyperboloid und Zylinder schnittgleich definiert werden, wobei die Schnitte keine Kreise, wohl aber untereinander „ähnlich" sein sollen: *Homoeoconicum* (IV 12 Kor. 2 und 4, S. 42), Parabolikoid (IV 13 Kor. 3, S. 42), *Homoeosphaericum* (IV 14 Kor. 3 und 4, S. 42), Hyperbolikoid (IV 15 Kor. 2 und 3, S. 42) und Zylindroid (=*Cylindraceus*, IV 18 Kor. 4 und 5, S. 43). Hierher gehört auch der *Dicylindraceus* (V 13, S. 62), der einen Körper darstellt, der in zwei räumlichen (zueinander senkrechten) Richtungen[109] durch Zylinderflächen begrenzt wird.

Von den keilförmigen Körpern geht der gerade Zylinderhuf (*primus cuneus notus*, IV 26, S. 47) nicht nur, wie Lalouvère glaubt, auf Gregorius a S. Vincentio[12], sondern ebenfalls schon auf Archimedes zurück[110]. Dagegen können der *alter cuneus notus* (V 11, S. 58), der *cuneus medius* (V 12, S. 59) und die anderen gegen Ende des Buches V eingeführten *cunei* Lalouvère zugeschrieben werden. Ein gleiches gilt von den Kegelhufen (*Homoeoconica condicta*), und zwar dem parabolischen (V 5 bis 7 und V 10, S. 54—56 und 57—57) und dem elliptischen und hyperbolischen (V 8, S. 56). Auch der über einem Dikeratoid[64] errichtete Körper (IV 12 Kor. 3 und 5, S. 42) ist zu erwähnen. Schließlich sei noch der Keil aus IV 21 genannt (S. 44—45), der von zwei ebenen Kurvensegmenten und einem gekrümmten Kurvenzweieck begrenzt wird.

Von den ebenen Gebilden sei zunächst auf die drei Quadratrizen (II 9, S. 19—20; III 9, S. 27 und 30—31; IV 21, S. 44—45) hingewiesen, die mit der gleichnamigen, nach Deinostratos benannten, aber bereits von Hippias von Elis gefundenen Kurve nur den Namen gemein haben: sie dienen nicht der Kreisquadratur im engeren Sinne, sondern der Quadratur anderer (ebener) Flächen. Es verdient Beachtung, daß Lalouvère, der ohne analytische Hilfsmittel arbeitet, aus rein geometrischen Überlegungen zu dem Ergebnis kommt, das die erstrebten Inhaltsbestimmungen derartige Kurven fordern.

Daß es Lalouvère in I 11 (S. 10—11) gelingt, den Inhalt eines gemischtlinigen Trapezes durch den eines affinen geradlinigen auszudrücken, muß ebenso angemerkt werden wie die Quadratur eines nicht durch Kegelschnitte begrenzten Möndchens (I 25, S. 14). Weiterhin müssen die mannigfachen in Buch III definierten Kurven und Flächen erwähnt werden. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die Feststellung, daß sich eine Ellipse (beziehungsweise Kreis) oder Hyperbel und eine Parabel in zwei symmetrisch gelegenen Punkten berühren können und in den Berührungspunkten gemeinsame Tangenten haben (III 4 und III 5, S. 25—26; vergleiche auch Abb. 32). (Ähnliche Überlegungen Keplers[58] zielen in andere Richtung und sind nicht so eingehend.) Es erfolgt dann die Einführung des Kegelschnittsystems (III 8 und III 9, S. 26—27) und in den anschließenden Definitionen die jener Kurven und Flächen, von denen im § 6 (S. 27—28, 30—33) ausführlich die Rede war.

---

[109] Wir wissen heute, daß schon Archimedes solche Körper berechnete; vergleiche J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik* VII². Berlin 1924, S. 34. — Auch P. Franceschi wäre zu nennen (J. Tropfke, a. a. O., S. 52.)

[110] J. Tropfke, a. a. O. [109], S. 33—34.

Schließlich sei noch auf die eigentlichen Kreis- und Hyperbelquadraturen eingegangen (III 18—20, S. 34—36; V 2 und V 3, S. 50—53). Lalouvère „quadriert" Vollkreis, Halbkreis, Viertelkreis und zwei Kreissegmente, bei deren einem sich die Sehne zum Kreisdurchmesser wie 3 zu 5 verhält; bei dem anderen beträgt der Bogen des Segments ein Drittel des Kreisumfangs. Die angezogenen beiden Hyperbelsegmente haben die Durchmesser $2a$ und $\frac{2}{7}a$, die auf der Hauptachse vom Scheitel aus zu messen sind. — In allen berechneten Fällen setzt Lalouvère die Drehmomente der krummlinig begrenzten Flächen denen von Rechtecken gleich. Die Maßzahlen der Hebelarme der Rechtecke und ihrer Flächeninhalte sind im allgemeinen rational, höchstens aber algebraisch-irrational, so daß dasselbe für ihre Drehmomente gilt. Ihnen sind die Drehmomente der krummlinig begrenzten Flächen gleich, deren Hebelarme bis zu den Schwerpunkten reichen. Nun sind aber — modern gesprochen — die Schwerpunktskoordinaten Brüche, in deren Nenner die zugehörigen Flächeninhalte stehen (siehe S. 17), die also bei Multiplikation mit den Maßzahlen der Flächeninhalte herausfallen, so daß das Produkt sehr wohl algebraisch sein kann. Lalouvère kann also die „Quadratur" des Kreises, deren Unmöglichkeit durch Lindemann (1882) bewiesen wurde, nur dadurch zu leisten vermeinen, daß er die Schwerpunktskoordinaten als gegeben ansieht. Lalouvères Kreisberechnung verhüllt in ihrer geometrisch-mechanischen Einkleidung das sehr viel tiefer liegende Problem nach dem zahlentheoretischen Charakter der Zahl $\pi$; hier konnte nur die neu entstehende Analysis letzte Ergebnisse erzielen, und gerade die analytischen Methoden lagen außerhalb von Lalouvères Gedankengängen. Damit kommen wir zu der methodischen Bedeutung der *Quadratura circuli.*

Lalouvère ist offenbar ein vorzüglicher Kenner der griechischen Mathematik, der Aristotelisch-scholastischen Überlieferung und der neueren Herausgeber und Kommentatoren des Euklid, Archimedes und Apollonios, wie Clavius und Commandino. Außerdem kennt Lalouvère sicher de la Faille, Guldin[111] und Gregorius a S. Vincentio, wie aus dem Vorwort *Ad lectorem* hervorgeht[11], und hat spätestens nach Erscheinen der *Quadratura circuli*, aber vor Herausgabe der *Appendix secunda* Valerio, Torricelli und Cavalieri eingesehen (siehe S. 14—15). In besonderem Maße haben Lalouvère die Archimedischen Schriften über die Parabelquadratur[23] und das Gleichgewicht ebener Flächen[22] beeinflußt, und zwar in der Richtung, daß er die Quadratur von Kreis- und Hyperbelsegmenten und die Kubatur darauf aufgebauter Körper aus Schwerpunktsbetrachtungen gewinnen will (siehe S. 7). Nun lagen Schwerpunktsbetrachtungen zweifellos im Zuge der Zeit, wie schon die Titel der Hauptwerke des Valerio und Guldin bezeugen. Dennoch ist der Weg Lalouvères und seine Art zu verallgemeinern durchaus originell und bemerkenswert.

Bleiben wir zunächst in der ebenen Geometrie! Lalouvère verallgemeinert die von den Griechen überlieferten Sätze in doppelter Hinsicht: einmal beschäftigt er sich auch mit gemischtlinigen Vier- und Dreiecken und zweitens zieht er auch Kurven in Betracht, die keine Kegelschnitte sind, sondern aus anderen glatten doppelpunktfreien Bögen bestehen; dabei spielen affine Beziehungen eine wesentliche Rolle. Das steht vornehmlich im Buch I. Im Buch II werden auf ebene Gebilde dieser Art Schwerpunktsbetrachtungen angewandt, in Anlehnung an Archimedes' oben genannte Schriften. Und für die Flächeninhaltsbestimmung (Lalouvère treibt also durchaus metrische Geometrie) erweist sich

---

[111] Wie Cantor, a. a. O. [1], S. 896—97, zu der Behauptung kommt, Lalouvère wolle weder Guldin noch Pappos gekannt haben, ist mir unerfindlich, da Lalouvère beide Namen erwähnt: Guldin im Vorwort *Ad lectorem* und mehrfach in der *Appendix secunda*, siehe S. 67; Pappos in den Prolegomena (*Quadr. circ.* S. 36, Zeile 11—12 von oben).

eine „Quadratrix" (II 9, S. 19—20) als notwendig. Im Buch III sollen nun Kreis- und Hyperbelsegmente quadriert werden, sofern ihre Schwerpunkte gegeben sind. Und jetzt erkennt man auch den Zusammenhang mit den vorhergehenden Büchern: Angenommen, der Mittelpunkt der betrachteten Kegelschnitte ist Drehpunkt der Waage; angenommen ferner, es gelingt, das Kegelschnittsegment mit einem Rechteck ins Gleichgewicht zu bringen; dann ergibt sich wegen der Übereinstimmung der Drehmomente der gesuchte Flächeninhalt als ein Bruch, in dessen Zähler das Drehmoment des Rechtecks steht und dessen Nenner der Abstand des Drehpunkts der Waage vom Schwerpunkt ist. Daß Lalouvère zur Herstellung des Gleichgewichts eine zweite Quadratrix heranzieht, die aus einem Kegelschnittsystem heraus, zu dem stets eine Parabel gehört, entwickelt wird, ist im § 6 dargelegt worden (siehe S. 30—31). Das Buch IV hängt insofern mit dem Buch III methodisch zusammen, als es die Schwerpunktsbetrachtungen auf Körper, insbesondere Drehkörper, überträgt. Dabei erfolgt auch die Kubatur eines *solidum cuneatum* mit Hilfe einer dritten Quadratrix (siehe S. 44—45). Sehr interessant ist der eigenartige Weg Lalouvères zur Bestimmung der Schwerpunkte der wichtigsten Drehkörper (IV 12 bis 15, S. 40—41), wie an Hand von IV 12 näher ausgeführt wurde (S. 41—42). Auch sind die Sätze IV 11 (S. 40) und IV 25, 26 (S. 47) von hervorragender methodischer Bedeutung für die Lalouvèreschen Entwicklungen. Im Buch V soll *absoluta circuli etc. quadratura* dadurch erreicht werden, daß in ihm unter Einführung eines *Dicylindraceus* (V 13, S. 62—63) als Vergleichskörper vom Rauminhalt gewisser Hufe von gleicher Höhe auf den Flächeninhalt der Grundfläche geschlossen wird. Dabei benutzt Lalouvère die in V 2 und V 3 quantitativ erfaßten Kreis- und Hyperbelsegmente (S. 50—53) als Grundflächen und nimmt die Hufe zylindrisch und konisch, insbesondere auch parabolisch, an. Die dabei niedergelegten Ergebnisse und Herleitungen sind besonderer Beachtung wert. Daß sich Lalouvère (im Gegensatz zu manchen anderen zeitgenössischen Mathematikern, die sich auch an der Kreisquadratur versucht haben, wie etwa Gregorius a S. Vincentio[12]) darüber klar geworden ist, daß er sein ursprüngliches Ziel nicht ganz erreicht hat, spricht für seine Einsicht und die Sorgfalt seiner Arbeitsweise. Und diese Sorgfalt wird den aufmerksamen Leser der *Quadratura circuli* keineswegs überraschen; denn mit welcher Umsicht rollt Lalouvère schon in den Prolegomena (§ 3, S. 5—7) den ganzen Problemkreis auf!

Im ganzen sieht man, daß Lalouvère an den entscheidenden Stellen seines Werkes Drehmomente von Flächen oder Körpern einander gleichsetzt, also mit dem Hebelgesetz arbeitet. Wir wollen die Wahl dieser Methode zu begründen versuchen: Aus den Prolegomena (S. 5—7) geht hervor, daß Lalouvère die bei der Kreis- und Hyperbelquadratur auftretenden Zahlen zu den nicht (mit Zirkel und Lineal) konstruierbaren rechnet. So scheint nur eine „mechanische" Lösung möglich zu sein, und was liegt da näher als die Anwendung desselben Hebelgesetzes, das schon Archimedes, das geschätzte Vorbild, als dessen Vollender Lalouvère sich ansieht, erfolgreich benutzt hat? So entwickelt Lalouvère sein Verfahren, dem die durch die Scholastik überlieferten „Atomlinien" Demokrits[112] und „Indivisibeln" Zenons[113] den Boden bereitet haben. Und wenn nun eine Zerlegung etwa eines zur Kubatur zu bringenden Körpers in indivisible und einzeln ins Gleichgewicht zu bringende Schichten vorgenommen wird? Dann wäre der „Königsweg" Lalouvères tatsächlich eine Vorstufe der Integralrechnung.

Gehen wir also an Hand eines im Zusammenhang der ganzen *Quadratura circuli* bedeutenden Satzes dieser Frage nach! Und zwar werde V 13 (S. 62—63) gewählt, wo

[112] Vergleiche H. Wieleitner, a. a. O. [103], S. 22ff.
[113] Vergleiche H. Hasse - H. Scholz, a. a. O. [67].

der schon mehrfach genannte *Dicylindraceus* behandelt wird: Zunächst erweist sich die Kurve *NKF* (Abb. 71, S. 62), die punktweise durch die Proportion

$$UK : UY = NU : NR \tag{42}$$

bestimmt wird, gemäß III 12 (S. 28) als eine Parabel. Dabei soll, während *N* Drehpunkt der Waage ist, der zwischen *N* und *A* gelegene Punkt *R* Aufhängepunkt für denjenigen Gleichgewichtskörper (eben den *Dicylindraceus*) sein, der dem durch zwei Querebenen abgeschnittenen Teil des Hufs *NDF* das Gleichgewicht zu halten hat. (Dieselbe Parabel ergibt sich für einen Aufhängepunkt *S* rechts von *F* und einen durch dieselben Querebenen abgeschnittenen Teil des Hufs *NEF*, wenn *F* Drehpunkt ist und $FS = NR$ gewählt wird; Lalouvère beweist es mittels der Ähnlichkeit der Dreiecke *NZU* und *FYU*.) Denkt man sich nun den *Dicylindraceus* in der bekannten Weise entstanden, so ist die durch die Querebene *ZUT* bewirkte Schnittfläche das Rechteck $TX \cdot UK$, und dieselbe Querebene schneidet gemäß IV 21 (S. 44—45) aus dem Huf *NDF* das Rechteck $TX \cdot UY$ aus. Beide Rechtecke haben gleiche Grundseiten, also verhalten sich ihre Flächeninhalte wie ihre Höhen *UK* bzw. *UY*. Unter Berücksichtigung von (42) folgt so

$$\frac{NR}{NU} = \frac{\text{Rechteck } TX \cdot UY}{\text{Rechteck } TX \cdot UK}.$$

Jetzt kommt die entscheidende Wendung: Was für den beliebigen Schnitt durch *U* gilt, gilt für *alle*[114] Schnitte, also auch für den ganzen Körper, der durch deren Summation entstanden gedacht werden kann:

$$NR \cdot \Sigma K = NU \cdot \Sigma Y.$$

Dabei bedeutet $\Sigma K$ die Summe aller *Dicylindraceus*schnitte, $\Sigma Y$ die Summe aller Schnitte des Hufs *NDF*. Wir brauchen in der Gegenwart nur hinzuzufügen: Man bilde die Grenzwerte jener Summen für den Fall, daß die Anzahl der Schnitte beliebig groß wird, mithin die Dicke der Schichten gegen Null strebt, und das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe ist da. (Der Rest des Beweises von V 13 verläuft dann zwangsläufig so, daß von den ganzen Körpern auf durch Querebenen abgeschnittene Teile geschlossen und ferner gezeigt wird, daß dieselben Erwägungen für den anderen Huf *NEF* gelten, so daß die Drehmomente der Hufe durch Vermittlung des *Dicylindraceus* als gleich erkannt werden.)

Lalouvère treibt also richtiggehend Integralrechnung. Ja, sein Weg hat — zumal in komplizierten Fällen, in denen Cavalieris erste Regel bedenklich erscheint (siehe S. 67) — einen heuristischen Wert, der nicht gering veranschlagt werden sollte. Denn Lalouvères Methode ist durchaus geeignet, zu neuen Ergebnissen in Form von „Vermutungen" über dann zu beweisende Sätze hinzuführen[115]. Und der zur Auffindung neuer Wahrheiten ungeeignete Exhaustionsbeweis träte jetzt in seine Rechte.

Im ganzen wendet also Lalouvère hauptsächlich zwei Verfahren an: Das Hebelgesetz, insbesondere auch für den Fall gegebener Schwerpunkte; dazu den zum Teil mit dem sogenannten Cavalierischen Prinzip äquivalenten Satz IV 11 (S. 40). —

Vergeblich sucht man bei Lalouvère eine Verwertung oder auch nur Anklänge der analytischen Verfahren seiner großen Zeitgenossen Fermat und Descartes, deren hier in

---

[114] Leibniz: „omnia", vergleiche S. Günther: *Geschichte der Mathematik* I, Neudruck. Berlin 1927, S. 136.

[115] Auch von Gauss ist ja bekannt, daß er zu vielen seiner zahlentheoretischen Sätze durch Zahlenbeispiele gelangte und so von der Verifikation zum Beweis fortschritt. (C. F. Gauss: *Werke* Band II, S. 516: Brief an Dirichlet.)

Betracht kommende Arbeiten ihm wohl seit 1637 bekannt waren[116]. Die Deutung ist nicht ausgeschlossen, daß Lalouvère die Methoden jener entbehrlich schienen. Und hier ist nun der Ort, um die eigentümliche Stellung Lalouvères in der Geschichte der Mathematik näher zu umreißen: Wenn mit der analytischen Geometrie und dem *calculus* die Geburt der modernen Mathematik anhebt, so steht Lalouvère in vielem ganz auf den Schultern der Alten. Es soll hier nicht einem Gegensatz von griechischer und moderner Mathematik das Wort geredet werden. Wir Heutigen wissen, daß beispielsweise Euklid mit seinem Parallelenaxiom ein mathematisches Gefühl gezeigt hat, das erst durch Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai in seiner Tragweite erkannt und gewürdigt wurde; daß Archimedes' Quadraturen im Grunde Integrationen sind. Vielmehr kann man vielleicht so sagen: Lalouvère erfaßt mit seiner gewaltigen geometrischen Vorstellungskraft die *notiones* in solchem Maße, daß er der *notationes* der modernen Analysis entraten kann. Ihm ist jeder Algorithmus fremd. Euklids und Apollonios' Schriften geben in ihrer geschliffenen Gestalt klassischer Prägung Lalouvère den Maßstab dafür, was Mathematik ist. Und bei Archimedes findet Lalouvère den göttlichen Funken in einer Methode, die von der Quadratur der Parabel auf die von Kreis und Hyperbel auszudehnen Lalouvère als seine Aufgabe ansieht. An Lalouvères *Quadratura circuli* sehen wir, zu welch weitgesteckten Zielen die von den Griechen bereitgestellten Mittel reichen, wieviel man *stylo Archimedeo* erreichen kann. Lalouvère handhabt den von den Griechen überlieferten mathematischen Gedankenvorrat mit Virtuosität.

Lalouvère rechnet nicht viel, und wenn, so setzt er stets Proportionen an. Um so bemerkenswerter ist der Scharfsinn, mit dem Lalouvère — hauptsächlich auch bei den komplizierten Körpern des Buches V — die „Lasten" so durch Querebenen begrenzt, daß die „Kräfte" und „Kraftarme" rationale Maßzahlen haben, sich also Quadraturen und Kubaturen im engeren Sinne ergeben. —

Wir sagten oben, daß Lalouvère sich für einen der Vollender des Archimedes hält. Und diese Überzeugung trifft, wie wir seit Auffindung der Archimedischen Methodenlehre[107], die bis zum Jahre 1906 verschollen war, wissen, in einem viel tieferen Sinne zu, als Lalouvère und seine Zeit ahnen konnten. Aus jener Schrift geht hervor, daß Archimedes selbst beim Auffinden seiner Sätze nicht anders vorgegangen ist als Lalouvère und die Exhaustionsbeweise erst hinterher verfaßt hat[117].

Von dem Umfang des Lalouvèreschen wissenschaftlichen Schriftwechsels haben wir gesprochen (S. 2). Aus der vorliegenden Darstellung der *Quadratura circuli* geht hervor, daß Lalouvère neue Ergebnisse auf einem Wege gewinnt, der als mit der Methode des größten Mathematikers der Antike verwandt das Urteil seiner Zeit[118] und der Mathematikgeschichte überhaupt nicht zu scheuen braucht.

---

[116] P. de Fermat: *Ad locos planos et solidos isagoge* (=*Oeuvres* éd. P. Tannery et Ch. Henry, Paris 1891 bis 1912, Band I). R. Descartes: *Géométrie* (= *Oeuvres complètes* éd. Ch. Adam et P. Tannery, Paris 1897 bis 1910, Band VI). Vergleiche auch M. Cantor, a. a. O.[1], S. 811—18; H. G. Zeuthen, a. a. O.[1], S. 192—215; H. Wieleitner, a. a. O.[75], S. 1—14. — Lalouvère war mit Fermat befreundet und hat daher wahrscheinlich Einblick in damals noch nicht gedruckte Arbeiten Fermats erhalten,

[117] Siehe zum Beispiel S. Günther, a. a. O.[114], S. 96—100.

[118] So sind Pardies in Frankreich und Wallis in England für Lalouvère eingetreten, dessen *Quadratura circuli* in England seit 1666 bekannt wurde. Sein Nachlaß (S. 2) sollte von der Royal Society gedruckt werden. — Vermutlich hat auch Newton von Lalouvère gelernt; vergleiche J. E. Hofmann: *Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis*, I. Abhandlung, S. 30, F. 104 (Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1943, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Nr. 2).

## Literatur.


Alegambe, Ph.: *Bibliotheca Scriptorum Societatis Jesu.* Antwerpen 1643, Rom 1675.

Apollonii Pergaei *quae graece exstant*, cum commentariis antiquis ed. J. L. Heiberg. 2 Bände, Leipzig 1890—93.

Archimedes: *Opera omnia*, ed. J. L. Heiberg. 3 Bände, zweite Auflage, Leipzig 1910—15.

Archimedes' *Werke*, her. von Sir Th. L. Heath, deutsch von F. Kliem. Berlin 1914.

Backer, A. A. de - Sommervogel, C.: *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus.* Bruxelles und Paris 1890—1909.

Bopp, K.: *Die Kegelschnitte des Gregorius a S. Vincentio.* Leipzig 1907.

Bossut, Ch.: *Discours sur la vie et les ouvrages de Blaise Pascal.* Oeuvres de Pascal, éd. Ch. Bossut. Band I, La Haye 1779.

Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Band I, vierte Auflage, Leipzig und Berlin 1922; Band II, zweite Auflage, Leipzig 1900; Band III, zweite Auflage, Leipzig 1901; Band IV, Leipzig 1908.

Cavalieri, B.: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.* Bologna 1635; zweite (verbesserte) Auflage, Bologna 1653.

Cavalieri, B.: *Exercitationes geometricae sex.* Bologna 1647.

Clavius, Ch.: *Euclidis elementorum libri XV.* Rom 1574.

Clavius, Ch.: *Geometria practica.* Rom 1604.

Commandino, F.: *Archimedis opera nonnulla in Latinum conversa et commentariis illustrata.* Venedig 1558.

Commandino, F.: *Apollonii Pergaei conicorum libri quattuor.* Bologna 1566.

Commandino, F.: *De centro gravitatis solidorum.* Bologna 1565.

Commandino, F.: *Euclidis elementorum libri XV una cum scholiis antiquis in Latinum conversi.* Pesaro 1572.

Descartes, R.: *Oeuvres complètes*, éd. Ch. Adam et P. Tannery. 12 Bände, Paris 1897—1910.

Euklid: *Opera omnia*, ed. J. L. Heiberg et H. Menge. Band 1—5, Leipzig 1883—88.

Fermat, P. de: *Oeuvres*, éd. P. Tannery et Ch. Henry. 4 Bände, Paris 1891—1912.

Galilei, G.: *Opere.* Edizione nazionale, ed. A. Favaro. 20 Bände, Florenz 1888—1909.

Gregorius a S. Vincentio: *Theoremata mathematica scientiae staticae.* Löwen 1624.

Gregorius a. S. Vincentio: *Opus geometricum circuli et sectionum coni.* Antwerpen 1647.

Guldin, P.: *De centro gravitatis.* Wien 1635—41.

Günther, S.: *Geschichte der Mathematik I* (Sammlung Schubert XVIII). Neudruck, Berlin 1927.

Hasse, H.- Scholz, H.: *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik* (Pan-Bücherei 3). Neudruck, Leipzig 1940.

Heiberg, J. L.-Zeuthen, H. G.: *Eine neue Schrift des Archimedes.* Bibliotheca Mathematica (3) 7 (1906—07), 321—63.

Hofmann, J. E.: *Das Opus geometricum des Gregorius a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz.* Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Jahrgang 1941, Nr. 13.

Hofmann, J. E.: *Studien zur Geschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis I.* Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Jahrgang 1943, Nr. 2.

Hoppe, E.: *Geschichte der Physik.* Braunschweig 1926.

Huygens, Ch.: *Oeuvres complètes*, publ. par la Société hollandaise des sciences. Band 1—22, La Haye 1888—1950.

Jöcher, Ch. G.: *Allgemeines Gelehrten-Lexicon.* 7 Bände, Leipzig bzw. Delmenhorst und Bremen 1750—1897.

Kepler, J.: *Opera omnia*, ed. Ch. Frisch. 7 Bände, Frankfurt und Erlangen 1858—71.

La Faille, J. Ch. de: *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis.* Antwerpen 1632.

Lalouvère, A. de: *7 lettres au P. Petau* (1631—44). Paris, Bibliothèque St. Géneviève.

Lalouvère, A. de: *Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis.* Toulouse 1651.

Lalouvère, A. de: *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris.* Toulouse 1660.

Leibniz, G. W.: *Mathematische Schriften*, her. von C. I. Gerhardt. 7 Bände, Halle/S., 1849—63.

Loria, G.: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, deutsche Ausgabe. 2 Bände, zweite Auflage, Leipzig 1910—11.

Loria, G.: *Guida allo studio della storia delle matematische.* Mailand 1916.

Maire, A.: *Bibliothèque générale des oeuvres de Pascal.* Band I, Paris 1925.

Maynard, M. U.: *Pascal, sa vie et son caractère, ses écrits et son génie.* 2 Bände, Paris 1850.

Mydorge, C.: *Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis.* Paris 1631.

Pappus: *Collectiones quae supersunt*, ed. F. Hultsch. 3 Bände, Berlin 1876—78.

Pascal, B.: *Oeuvres*, publ. par L. Brunschwicg, P. Boutroux et F. Gazier. 14 Bände, Paris 1908—14.

Petavius, D.: *Orationes* (*Epistularum libri tres*). Paris 1652—53.

Poggendorff, J. C.: *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften.* Band I—IV, Leipzig 1863—1904; Band V, Leipzig und Berlin 1925—26; Band VI, Berlin 1936—39.

Ptolemaeus, Claudius: *Opera quae exstant omnia*, ed. J. L. Heiberg. 2 Bände, Leipzig 1898—1907.
Rigaud, St.: *Correspondence of scientific men of the seventeenth century.* 2 Bände, Oxford 1841.
Roberval, G. Personne de: *Ouvrages de Mathématiques.* Paris 1731.
Rudio, F.: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, vier Abhandlungen über die Kreismessung.* Leipzig 1892.
Rudio, F.: *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates.* Leipzig 1907.
Stein, W.: *Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes.* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abteilung B, 1 (1929—30), 221—44.
Tacquet, A.: *Cylindricorum et annularum libri quattuor.* Antwerpen 1651; liber quintus, Antwerpen 1659.
Tannery, P.: *Pascal et Lalouvère.* Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux (3) 5 (1890), 55—84.
Torricelli, E.: *Opere*, ed. G. Loria e G. Vassura. 4 Bände, Faenza 1919—44.
Tropfke, J.: *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.* Band 1—4, dritte Auflage, Berlin und Leipzig 1930—40; Band 5—7, zweite Auflage, Berlin und Leipzig 1923—24.
Turnbull, H. W.: *The James Gregory tercentenary memorial volume.* London 1939.
Valerio, L.: *De centro gravitatis solidorum.* Rom 1604.
Wallis, J.: *Opera mathematica.* 3 Bände, Oxford 1693—99.
Wallner, C.: *Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis.* Bibliotheca Mathematica (3) 4 (1903), 28—47.
Wieleitner, H.: *Geschichte der Mathematik* (Sammlung Schubert LXIII—LXIV). Teil $II_1$, Leipzig 1911; Teil $II_2$, Berlin und Leipzig 1921.
Wieleitner, H.: *Mathematische Quellenbücher* I—IV (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei 3, 11, 19, 24). Berlin 1927—29.
Wieleitner, H.: *Das Fortleben der Archimedischen Infinitesimalmethoden bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts, insbesondere über Schwerpunktsbestimmungen.* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abteilung B, 1 (1929—30), 201—20.
Wieleitner, H.: *Geschichte der Mathematik* (Sammlung Göschen 226, 875). Neudruck, Berlin 1939.
Wieleitner, H.-Hofmann, J. E.: *Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde.* Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Neuen Realgymnasiums, München 1934.
Witte, H.: *Diarium biographicum.* Danzig und Riga 1688, 1691.
Wolff, Chr. v.: *Elementa matheseos universae I.* Halle/S. 1713.
Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, deutsche Ausgabe. Leipzig 1903.

## Namenregister.

Es bedeutet S. = Seite, F. = Fußnote. *Kursiv* gesetzte Ziffern zeigen an, daß dort ein Werk des betreffenden Verfassers mit voller Titelangabe zitiert wird. Namen von Herausgebern sind nicht berücksichtigt.

Alegambe, Philippe (1592—1652) S. 3; F. *11.*
Antiphon (um 430 v. Chr.) S. 6.
Apollonios von Perge (265 ?—170 ? v. Chr.) S. 3, 4, 14, 38, 69, 72; F. *21*, 45.
Archimedes von Syrakus (287 ?—212 v. Chr.) S. 3, 4, 5, 6, 7, 15, 17, 18, 21, 22, 24, 28, 29, 37, 38, 40, 42, 46, 48, 54, 67, 68, 69, 70, 72; F. *17, 19, 22, 23*, 34, *35*, 44, 47, 49, 51, 53, 55, 56, 57, 60, 63, 70, 80, 88, 107, 109.
Aristoteles (384—322 v. Chr.) S. 50, 69.

Backer, Aug. Al. de (1809—1873) F. *5.*
Bolyai, Johann (1802—1860) S. 72.
Bryson von Heraklea (Ende 5. Jh. v. Chr.) S. 6.

Cantor, Moritz (1829—1920) S. 1, 2; F. *1*, 3, 4, 111, 116.
Cavalieri, Bonaventura (1598 ?—1647) S. 2, 5, 40, 49, 66, 67, 69, 71; F. *25, 27*, 49, 74, 104, 106.
Clavius, Christoph (1537—1612) S. 3, 4, 6, 40, 69; F. *29.*
Collins, John (1625—1683) F. 6.
Commandino, Federigo (1509—1575) S. 3, 4, 21, 40, 69; F. *34, 54.*

Deinostratos (um 350 v. Chr.) S. 68.
Demokritos von Abdera (460 ?—370 ? v. Chr.) S. 40, 70.
Descartes, René (1596—1650) S. 71; F. *28, 116.*
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805—1859) F. 115.

Eudoxos von Knidos (410 ?—356 ? v. Chr.) S. 7.
Euklid von Alexandria (um 325 v. Chr.) S. 3, 4, 36, 40, 67, 69, 72; F. *20*, 31, 33, 93, 105.

Fermat, Pierre de (1601—1665) S. *1*, 2, 15, 20, 71; F. 1, *2, 116.*
Franceschi, Pietro de (1410 ?—1492) F. 109.

Gauß, Carl Friedrich (1777—1855) S. 72; F. *115*.
Gregorius a S. Vincentio (1584—1667) S. 2, 3, 4, 12, 66, 68, 69, 70; F. *11*, *12*, 15, 59.
Gregory, James (1638—1675) F. 6.
Guldin, Paul (1577—1643) S. 1, 2, 5, 66, 67, 69; F. *11*, 106, 111.
Günther, Siegmund (1848—1922) F. *114*, 117.

Hasse, Helmut (geb. 1898) F. *67*, 113.
Heiberg, Johann Ludwig (1854—1928). F. *107*.
Heron von Alexandria (um 100 v. oder n. Chr.?) S. 50.
Hippias von Elis (um 420 v. Chr.) S. 68.
Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr.) S. 6, 7, 14.
Hofmann, Joseph Ehrenfried (geb. 1900) F. *15*, 16, *38*, 41, 59, *118*.
Hoppe, Edmund (1854—1928) F. *85*.
Huygens, Christian (1629—1695) F. 1.

Jöcher, Christian Gottlieb (1694—1758) F. *11*.

Kepler, Johannes (1571—1630) S. 2, 67, 68; F. *58*, 73.

la Faille, Jean Charles de (1597—1652) S. 69; F. *11*.
Lalouvère, Antoine de (1600—1664) S. passim; F. 1, 6, 32, 37, 40, 41, 43, 47, 48, 50, 52, 58, 62, 64, 72, 73, 77, 90, 97, 100, 103, 106, 111, 116, 118.
Leibniz, Gottfried Wilhelm von (1646—1716) F. 8, 15, *28*, 114, 118.
Lindemann, Ferdinand (1852—1939) S. 69.
Lobatschefskij, Nikolaj Iwanowitsch (1793—1856) S. 72.

Menaichmos (um 360 v. Chr.) S. 6.

Newton, Isaac (1642—1727) F. 118.
Nikomedes (um 180 v. Chr.) S. 6.

Pappos von Alexandria (Ende 3. Jh. n. Chr.) F. 111.
Pardies, Gaston (1636—1673) F. 118.
Pascal, Blaise (1623—1662) S. 1; F. 1.
Petau, Dénis (1583—1652) S. *2*; F. 7.
Platon (427—347 v. Chr.) S. 5.
Plutarch (50?—120? n. Chr.) S. 5.
Poggendorff, Johann Christian (1796—1877) F. *5*, 7.
Ptolemaios, Klaudios (um 150 n. Chr.) S. 6, 37; F. *65*.

Rigaud, Stephen Peter (1774—1839) F. *8*.

Scholz, Heinrich (geb. 1884) F. *67*, 113.
Serres, Olivier de (1539—1619) S. *6*.
Sommervogel, Carlos (1834—1902) F. *5*.
Souvey (Soverus), Bartholomäus (1577?—1629) S. *5*.
Stevin, Simon (1548—1620) S. 50.

Tannery, Paul (1843—1904) F. *1*.
Torricelli, Evangelista (1608—1647) S. 2, 5, 17, 18, 66, 67, 69; F. 1, *26*, *49*, 102, 103.
Tropfke, Johannes (1866—1939) F. *30*, 71, *109*, 110.
Turnbull, Herbert Westren (geb. 1885) F. *6*.

Valerio, Luca (1552?—1618) S. 2, 5, 66, 69; F. *24*, 74.

Wallis, John (1616—1703) F. 1, *75*, 118.
Wieleitner, Heinrich (1874—1931) F. *38*, *49*, *66*, 71, *75*, *103*, 112, 116.
Wolff, Christian Freiherr von (1679—1754) F. *74*.
Wren, Christopher (1632—1723) S. 46; F. 75.

Zenon von Elea (um 450 v. Chr.) S. 40, 70.
Zeuthen, Hieronymus Georg (1839—1920) S. 2; F. *1*, *107*, 116.

## Verzeichnis der Fachausdrücke.

Aufgenommen sind nur die von Lalouvère geprägten oder sonst nicht oder nur wenig bekannten Fachausdrücke. Es bedeutet S. = Seite, F. = Fußnote. Die Stelle, an der der betreffende Ausdruck erklärt oder definiert wird, ist *kursiv* gesetzt.

*alter cuneus notus* S. 47, *58*, 59, 63, 66, 68.
*alterum segmentum hyperbolae condictum* (*notum*) S. *51*, 55, 57, 58.
*arcus inferior* S. *27*, 30, 33.
*arcus superior* S. *27*.
Atomlinie S. 70.
*angulus externus* S. *59*.
*angulus internus* S. *59*.

*centrum systematis* S. *27*, 31.
*cunei coniugatis* S. *62*, 64.
*cunei laterales* (*collaterales*) S. *63*, 64.
*cuneus medius* S. *59*, 60, 61, 65, 68.
*cuspides xystroides* S. *27*.

*Cylindraceus* (= Zylindroid) S. *43*, 47, 49, 54, 56 58, 59, 60, 62, 63, 64, 68; F. 73, 90.

*diameter recta* S. *27*, 30, 32, 33.
*diameter transversa* S. *27*, 40, 43, 44, 51, 52, 54.
*Dicylindraceus* S. 4, *62*, 63, 65, 68, 70, 71.
Dikeratoid S. 36, 42, 52, 68; F. *64*.

Exhaustion S. 7, 15, 37, 67, 71, 72.
Exparabel (= *exparabola*) S. *27*, 28, 29, 30, 32, 34, 36.

*falx inferior* S. *27*, 30.
*falx superior* S. *27*.

gemischtlinig S. *8*, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 24, 68, 69.
*γνωρίμως* (= *nota et condicta ratione*) S. 21; F. *55*.

Haupttangente S. *27*, 31, 32, 33; F. 62.
*Homoeoconicum* (= *Homoeoconus*) S. *42*, 44, 46, 49, 53, 54, 55, 56, 57, 65, 68; F. 90.
*Homoeoconicum condictum* S. *54*, 65, 68.
*Homoeosphaericum* S. *42*, 43, 44, 49, 68.
Hyperbolikoid S. *42*, 44, 49, 68.

Indivisibel S. 15, 40, 67, 70.

Kegelschnittsystem (= *systema nota methodo descriptum*) S. 24, 26, *27*, 29, 30, 33, 36, 68, 70.

*latus rectum* S. *14*, 43, 46, 47, 52.
*latus transversum* S. *14*.
*libra grammica* S. 48.
*libra plana* S. 4, 48.
*lunula (cuspis) exparabolica* S. *27*, 28, 29, 32, 36.
*lunula (cuspis) media* S. 27, *30*, 31, 32, 34.
*lunula parabolica* S. *27*, 32, 33.

*nota et condicta ratione* siehe *γνωρίμως*.

*ordinatim applicata* F. 37.
*oxygonia* S. *7*.

Parabelhuf S. *54*, 55, 56, 65.
Parabolikoid S. *42*, 43, 49, 68.
*parallelum condictum* siehe Querebene.
*periphericum* S. *45*, *46*.

*primum fastigiati aequiponderans* S. 64.
*primus cuneus notus* S. 4, *47*, 50, 58, 66, 68.
*primus terminus aequalitatis notae* S. *65*.
Prismatoid S. *41*, 42.

Quadratrix erster Art S. *19*, *20*, 68.
Quadratix zweiter Art S. 27, *30*, 31, 32, 33, 34, 36, 49, 68, 70; F. 62.
Quadratix dritter Art S. *44*, 45, 68, 70.
Querebene (= *parallelum condictum*) S. *47*, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 71, 72.

*reductio ad impossibile* S. *5*, 67.

*secundum fastigiati aequiponderans* S. 64.
*secundus terminus aequalitatis notae* S. *65*.
*segmentum hyperbolae condictum* S. *51*, 53, 55, 58, 63.
Semidikeratoid S. 37, 41.
*solidum cuneatum* S. *44*, 49, 70.
*solidum fastigiatum* S. 64.
*solidum hyperbolicum acutum* F. 103.
*systema nota methodo descriptum* siehe Kegelschnittsystem.
Systemarm S. *27*.
Systemtangente S. *27*, 29.

*ungula* S. 4, 12, 66.

Xystroid S. *46*, 48, 50, 66.

Zylindroid siehe *Cylindraceus*.

---

Eingegangen am 25. Februar 1946.

# Verallgemeinerungen von Sequenzen in Permutationen.

Von *Paul Armsen* in Erlangen.

Die vorliegende Arbeit verallgemeinert und vereinfacht Untersuchungen über Sequenzen in Permutationen, über die H. Rohrbach 1946 auf der Mathematikertagung in Tübingen vorgetragen hat[1]), und beantwortet u. a. Fragen, die im Anschluß an diesen Vortrag aufgeworfen worden sind.

In der Permutation $P(n)=p_1p_2\ldots p_n$ der $n$ Elemente $1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 2)$ liegt eine *Sequenz* vor, wenn für einen Index $\alpha$ mit $1 \leq \alpha \leq n-1$

$$p_{\alpha+1}=p_\alpha+1$$

gilt. Dieser Begriff kann auf mehrere Arten verallgemeinert werden. Faßt man nämlich die identische Permutation oder $P(n)$ oder beide als Zyklus auf, so kann man auch den Fall

$$p_\alpha=n, \; p_{\alpha+1}=1,$$

oder den Fall

$$p_1=p_n+1,$$

oder diese beiden und auch den Fall

$$p_n=n, \; p_1=1$$

als Sequenzen erklären. Das bedeutet, daß man entweder die Elemente von $P(n)$ oder deren Indizes oder beides mod $n$ betrachtet. Dementsprechend sei allgemein definiert:

Das Elementepaar $p_\alpha$, $p_\beta$ bildet eine *Sequenz*, wenn

(1) $\qquad \beta=\alpha+1$ und $p_\beta=p_\alpha+1 \quad (1 \leq \alpha \leq n-1)$

ist; eine *Zyklussequenz* für

(2) $\qquad \beta=\alpha+1$ und $p_\beta \equiv p_\alpha+1 \pmod{n} \quad (1 \leq \alpha \leq n-1)$;

eine *Kreissequenz* für

(3) $\qquad \beta \equiv \alpha+1 \pmod{n}$ und $p_\beta=p_\alpha+1 \quad (1 \leq \alpha \leq n)$;

schließlich eine *Totalsequenz*, wenn

(4) $\qquad \beta \equiv \alpha+1 \pmod{n}$ und $p_\beta \equiv p_\alpha+1 \pmod{n} \quad (1 \leq \alpha \leq n)$

[1]) *P. Armsen-H. Rohrbach*, Sequenzen in Permutationen, Archiv der Mathematik 1 (1948), 106—112.

gilt. Natürlich ist jede Sequenz zugleich Zyklussequenz und Kreissequenz, sowie jede Zyklus- oder Kreissequenz zugleich Totalsequenz.

Es ist zweckmäßig, bei naheliegender begrifflicher Deutung — in den Fällen (1) und (2) existiert dann kein $\alpha$ — auch den Wert $n=1$ zuzulassen.

Geht bei $P(n)$ ein Element $\nu$ $(1 \leq \nu \leq n)$ in sich über, d. h. ist $p_\nu = \nu$, so heiße $\nu$ eine *Eigenstelle* von $P(n)$. Es sei nun für eine ganze Zahl $k \geq 0$

$$(5) \qquad E_k(n), \qquad S_k(n), \qquad Z_k(n), \qquad T_k(n)$$

beziehentlich die Anzahl der Permutationen $P(n)$ mit genau $k$

Eigenstellen, Sequenzen, Zyklussequenzen, Totalsequenzen.

Die Anzahl $K_k(n)$ der $P(n)$ mit genau $k$ Kreissequenzen braucht nicht gesondert betrachtet zu werden, da diese Anzahl mit $Z_k(n)$ übereinstimmt. Denn jeder Zyklussequenz in $P(n)$ entspricht eine Kreissequenz in der inversen Permutation $P^{-1}(n)$ und umgekehrt. Ist nämlich

$$P^{-1}(n) = q_1 q_2 \ldots q_n \text{ mit } q_{p_\mu} = \mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

so folgt, falls $p_\alpha$, $p_\beta$ eine Zyklussequenz bilden, nach (2)

$$p_\beta \equiv p_\alpha + 1 \pmod{n} \text{ und } q_{p_\beta} = \beta = \alpha + 1 = q_{p_\alpha} + 1.$$

Also bilden $q_{p_\alpha}$, $q_{p_\beta}$ eine Kreissequenz. Ist umgekehrt $p_\alpha$, $p_\beta$ eine Kreissequenz, so erhält man mittels (3)

$$p_\beta = p_\alpha + 1 \text{ und } q_{p_\beta} = \beta \equiv \alpha + 1 = q_{p_\alpha} + 1 \pmod{n},$$

d. h. in $q_{p_\alpha}$, $q_{p_\beta}$ liegt eine Zyklussequenz vor.

Analog sieht man, daß beim Übergang zur inversen Permutation Sequenzen in Sequenzen und Totalsequenzen in Totalsequenzen übergehen.

Die Bezeichnungen (5) sollen — soweit keine Mißverständnisse zu befürchten sind — auch als Namen für die zugehörige Art von Permutationen benutzt, also z. B. unter den $S_k(n)$ die $P(n)$ mit genau $k$ Sequenzen, unter den $S_0(n)$ die sequenzfreien Permutationen verstanden werden, und die Redeweise, $Q$ sei eine $E_1(n)$, soll bedeuten, daß $Q$ eine $P(n)$ mit genau einer Eigenstelle ist. Beispielsweise gilt:

Die $P(5) = 25134$ ist eine $E_0(5)$, $S_1(5)$, $Z_2(5)$, $K_1(5)$, $T_2(5)$,

ihre $P^{-1}(5) = 31452$ ist eine $E_0(5)$, $S_1(5)$, $Z_1(5)$, $K_2(5)$, $T_2(5)$,

die $P(5) = 13425$ ist eine $E_2(5)$, $S_1(5)$, $Z_1(5)$, $K_1(5)$, $T_2(5)$,

und für jedes $n \geq 1$ ist die identische Permutation eine $E_n(n)$, $S_{n-1}(n)$, $Z_{n-1}(n)$, $K_{n-1}(n)$, $T_n(n)$. Eine entsprechende Redeweise wird auch bei den übrigen, noch zu definierenden Anzahlen verwendet.

Eine weitere, naheliegende Verallgemeinerung der Sequenzen ergibt sich, wenn man statt (1)

$$(6) \qquad p_{\alpha+1} = p_\alpha + d \quad (d > 0)$$

mit ganzzahligem $d$ betrachtet. Das Paar $p_\alpha$, $p_{\alpha+1}$ heiße dann eine *$d$-Progression*, und die Sequenzen ordnen sich als 1-Progressionen hier unter. Dabei genügt es, sich in (6) auf $d > 0$ zu beschränken. Denn der Fall $d = 0$ ist nicht möglich, da die $p_\alpha$ voneinander

verschieden sind, und der Fall $d<0$ erledigt sich sofort, indem man von der Permutation $p_1 p_2 \cdots p_n$ zu

$$q_1 q_2 \cdots q_n \text{ mit } p_i + q_i = n+1 \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

übergeht, d. h. statt der Grundanordnung $1\ 2 \ldots n$ die Reihenfolge $n\ n-1 \ldots 2\ 1$ als Grundanordnung wählt. Es ist also, falls ${}_dP_k(n)$ die Anzahl der Permutationen von $n$ Elementen mit genau $k$ $d$-Progressionen bezeichnet,

$$(7) \qquad {}_dP_k(n) = {}_{|d|}P_k(n) \quad \text{für } d \gtrless 0,$$

insbesondere wird man im Falle

$$(8) \qquad p_{\alpha+1} = p_\alpha - 1 \quad (1 \leq \alpha \leq n-1),$$

der als Gegenstück zu den Sequenzen (1) von Interesse ist, wieder auf die Anzahlen $S_k(n)$ geführt.

Im folgenden werden daher die $d$-Progressionen (6) nur für den Fall $d>0$ betrachtet. Damit hat man den Begriff der $d$-Progression für $d \leq 0$ noch frei, und es erweist sich als zweckmäßig, diese Freiheit zur Definition von $d$-Progressionen für $d=0$ und $d=-1$ auszunutzen. Es liegt nahe, als 0-Progressionen die Eigenstellen zu definieren. Die Definition der $-1$-Progressionen ergibt sich im Anschluß an die Totalsequenzen (§ 4). Ihre — zunächst etwas befremdende — Einführung vereinfacht die Berechnungen im Falle (4) erheblich und rundet die Betrachtungen in befriedigender Weise ab.

Alle Möglichkeiten (1), (2), (3), (4), (6) und damit, auf Grund von (7), auch (8) lassen sich gemeinsam übersehen. Die im Anschluß an den Tübinger Tagungsvortrag gestellten Fragen bezogen sich auf die Möglichkeiten (2), (3), (4) und (8). Im folgenden werden für die Anzahlen $E_k(n)$, $S_k(n)$, $Z_k(n) = K_k(n)$, $T_k(n)$ und ${}_dP_k(n)$ explizite Summendarstellungen und zahlreiche Rekursionsformeln abgeleitet, sowie ihr Zusammenhang mit den Näherungssummen für $\frac{1}{e}$ aufgezeigt. Die Anzahlen $E_k(n)$ sind natürlich längst bekannt[2]); sie und die Eigenstellen selbst werden hier nur zu Vergleichszwecken herangezogen. Ebenso führen auch die 0-Progressionen nur auf das Eulersche Rencontreproblem. Die Resultate über die $S_k(n)$ finden sich in der unter[1]) zitierten Arbeit.

Zu den ${}_dP_k(n)$ ist zu bemerken, daß der Fall $d=0$ sich den Formeln für $d>0$ ohne weiteres unterordnet, daß aber nicht alle für $d \geq 0$ richtigen Formeln auch noch für $d=-1$ gelten. Vielmehr enthalten einige der für $-1$-Progressionen gültigen Formeln zusätzliche Summanden $(-1)^n$, und dies läßt sich auch nicht durch eine andere Definition der $-1$-Progressionen umgehen. Bemerkenswert ist ferner, daß die Anzahlen der $P(n)$ ohne $d$-Progressionen (bei vorgegebenem $d \geq 0$), nach $d$ und $n$ geordnet, eine Tabelle ergeben, deren Werte bequem als Differenzenfolgen von $n!$ oder als Summenfolgen der Zahlenfolge des Eulerschen Rencontreproblems zu berechnen sind. In diesem Fall erhält man nachträglich sogar die Werte für $d=-1$ aus unseren Formeln, wenn man für $(-1)!$ überall 1 schreibt.

Die Beweise benutzen wie in [1]) nur kombinatorische Überlegungen, insbesondere keine erzeugenden Funktionen[3]). Das Hauptbeweismittel ist eine eineindeutige Abbildung der $P(n)$ auf sich, bei der die Anfangselemente erhalten bleiben und Eigenstellen in Sequenzen übergehen.

---

[2]) Vgl. z. B. *J. L. Coolidge*, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1927, S. 26—27.

[3]) In dieser Hinsicht unterscheidet sich die vorliegende Arbeit wesentlich von der kürzlich erschienenen Untersuchung von *H. Burger*. Vgl. Zusatz bei der Korrektur und Fußnote [18]).

## 2. Abbildung $E \leftrightarrow S$; erster Teil.

Es soll eine Abbildung der $P(n)$ auf sich hergestellt werden, bei der im wesentlichen Eigenstellen in Sequenzen übergehen. Sie werde daher kurz mit $E \leftrightarrow S$ bezeichnet. Die Abbildung ist — zwecks Übersichtlichkeit — so gewählt, daß

1. die Anfangselemente erhalten bleiben,
2. der Eigenstelle $\nu$ die Sequenz $\nu-1, \nu$ entspricht ($\nu=2, 3, \ldots, n$).

Dazu werden (für $n \geq 1$) zunächst nur die $S_0(n)$ und die $E_0(n)$ sowie diejenigen $E_1(n)$, die die Eigenstelle 1 (also keine andere) enthalten, betrachtet, und ein Verfahren angegeben, nach dem sukzessive aus den betrachteten $S_0(1)$ bzw. $E_1(1)$ die höheren $S_0(n)$ bzw. $E_0(n)$ und $E_1(n)$ hergestellt werden. Bei den einzelnen Schritten der Abbildung $E \leftrightarrow S$ sollen jeweils die an entsprechender Stelle hergestellten Permutationen mit gleichen Anfangselementen einander zugeordnet werden.

Aus diesem Herstellungsverfahren folgt dann, da es $\frac{1}{n} E_1(n)$ Permutationen der Art $E_1(n)$ gibt, die 1 als Eigenstelle haben:

$$E_0(n) + \frac{1}{n} E_1(n) = S_0(n).$$

Nun ist offenbar $E_k(n) = \binom{n}{k} E_0(n-k)$, $k=0,1,\ldots,n$, wenn noch $E_0(0)=1$ gesetzt wird, also die Behauptung äquivalent zu

$$\text{(I)} \qquad \underline{E_0(n) + E_0(n-1) = S_0(n).}$$

In dieser Form soll sie jetzt bewiesen werden. Der Beweis wird durch das angekündigte Herstellungsverfahren für die Abbildung $E \leftrightarrow S$ erbracht und dies Verfahren für $E$ und $S$ durchweg *neben*einander angeordnet. Zunächst werden die betrachteten $E_k(n)$ und $S_0(n)$ auf je drei (einander entsprechende) Arten (a), (b), (c) verteilt:

| | $E$ | $S$ |
|---|---|---|
| (a) | $q_1=1$ | $p_1=1$ |
| (b) | alle $E_0(n)$ außer (c) | alle $S_0(n)$ außer (a) und (c) |
| (c) | $q_\alpha=1$; $q_1=\alpha \neq 1$ | $p_\lambda=n$; $p_{\lambda+1}=1$ (also die $Z_1(n)$, die $S_0(n)$ sind). |

Dabei werde mit

$$Y=y_1y_2\cdots y_{n-1} \qquad X=x_1x_2\cdots x_{n-1}$$

eine $P(n-1)$ und mit

$$Q=q_1q_2\cdots q_n \qquad P=p_1p_2\cdots p_n$$

die aus ihr hergestellte $P(n)$ bezeichnet.

Mit $a_n$, $b_n$, $c_n$ bzw. $(a+b)_n$ werden die Anzahlen der zur Art (a), (b), (c) bzw. (a) und (b) gehörigen $E_k(n)$ bzw. $S_0(n)$ bezeichnet. Diese Anzahlen erweisen sich bei $E$ und $S$ als gleich, denn die beiden Herstellungsverfahren sind voneinander unabhängig; man hat $a_1=1$, $b_1=c_1=0$, und allgemein ist (zum Beweis dient das nachfolgende Herstellungsverfahren)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(A)} & a_n=b_{n-1}+c_{n-1} \\ \text{(B)} & b_n=(n-1)(b+c)_{n-1} \\ \text{(C)} & c_n=(n-1)a_{n-1} \end{array}\right\}, \text{ also } \left\{\begin{array}{l} a_n=(b+c)_{n-1}, \\ b_n=(n-1)a_n, \\ c_n=(a+b)_{n-1}. \end{array}\right.$$

Mit $Q(Y)$ sei die Herstellung von $Q$ aus $Y$ und analog die übrigen Herstellungen benannt.

Fall (A)

| $E$ | $S$ |
|---|---|
| $\underline{Q(Y)}$: Es ist, da $Y$ kein (a) ist, $y_\mu \neq \mu$ $(\mu=1, 2, \ldots, n-1)$ | $\underline{P(X)}$: Es ist, da $X$ kein (a) ist, $x_1 \neq 1$; $x_\nu \neq x_{\nu-1}+1$ $(\nu=2, \ldots, n-1)$ |

Gesetzt werde

| | |
|---|---|
| $q_1=1$; $q_{\mu+1}=y_\mu+1 \neq \mu+1$, also ist $Q$ ein $a_n$. | $p_1=1$; $p_{\mu+1}=x_\mu+1 \neq p_\mu+1$ $(\mu=1, 2, \ldots, n-1)$, also ist $P$ ein $a_n$. |
| $\underline{Y(Q)}$: Es ist $q_1=1$; $q_{\mu+1} \neq \mu+1$ | $\underline{X(P)}$: Es ist $p_1=1$; $p_{\mu+1} \neq p_\mu+1$ |

und wegen

| | |
|---|---|
| $y_\mu=q_{\mu+1}-1 \neq \mu$ | $x_\mu=p_{\mu+1}-1 \neq p_\mu=x_{\mu-1}+1$ $(=1$ für $\mu=1)$ |
| ist $Y$ | ist $X$ |

ein $b_{n-1}$ oder $c_{n-1}$.

Also gilt (A).

Fall (B)

| | |
|---|---|
| $\underline{Q(Y)}$: Wie bei (A) ist $y_\mu \neq \mu$ $(\mu=1, 2, \ldots, n-1)$ | $\underline{P(X)}$: Wie bei (A) ist $x_1 \neq 1$; $x_\nu \neq x_{\nu-1}+1 (\nu=2, 3, \ldots, n-1)$. |

Setzt man

| | |
|---|---|
| $q_1=\alpha \neq 1$, | $p_1=\alpha \neq 1$, |

so werden $n-1$ verschiedene $P(n)$ hergestellt mit $\alpha=2, 3, \ldots, n$ und

| | |
|---|---|
| $q_{\lambda+1}=1$ für $y_\lambda=\alpha-1$, $q_{\mu+1}=y_\mu+1$ für $y_\mu \neq \alpha-1$. | $p_{\mu+1} \equiv x_\mu+\alpha \pmod{n}$; $\mu=1, 2, \ldots, n-1$ [hier ist (A) nur der Spezialfall $\alpha=1$ bei (B)]. Man hat |
| Weil also $\lambda+1 \neq \alpha$ ist, ist $Q$ kein $c_n$; folglich (da offensichtlich eine $E_0(n)$) ein $b_n$. | $p_{\nu+1} \not\equiv x_{\nu-1}+1+\alpha \equiv p_\nu+1$ und $p_2 \not\equiv 1+\alpha \equiv p_1+1$. Also ist $P$ zyklussequenzfrei, also ein $b_n$. |
| $\underline{Y(Q)}$: Es ist $q_1=\alpha \neq 1$; $q_\alpha \neq 1$ (weil $Q$ als $b_n$ vorausgesetzt ist) und natürlich $q_{\mu+1} \neq \mu+1$ $(\mu=1, 2, \ldots, n-1)$ | $\underline{X(P)}$: Es ist $p_1=\alpha \neq 1$, $p_{\mu+1} \not\equiv p_\mu+1$ (weil $P$ als $b_n$ vorausgesetzt ist) |

und wegen

| | |
|---|---|
| $y_\lambda=\alpha-1$ für $q_{\lambda+1}=1$, also $\alpha \neq \lambda+1$ | $x_\nu \equiv p_{\nu+1}-\alpha \not\equiv p_\nu+1-\alpha \equiv$ $\equiv x_{\nu-1}+1$ und |
| $y_\mu=q_{\mu+1}-1$ für $q_{\mu+1} \neq 1$ | $x_1 \equiv p_2-\alpha \not\equiv p_1+1-\alpha=1$ |
| ist $Y$ eigenstellenfrei, also ein $b_{n-1}$ oder $c_{n-1}$. | ist $X$ ein $b_{n-1}$ oder $c_{n-1}$. |

Also gilt (B), weil die Abbildung

$Q(Y)$ $\qquad\qquad$ $P(X)$

bei festem $\alpha$ umkehrbar eindeutig ist.

Fall (C)

$\underline{Q(Y)}$: Es ist $y_1=1$; $y_\nu \neq \nu$ $\qquad$ $\underline{P(X)}$: Es ist $x_1=1$; $x_\nu \not\equiv x_{\nu-1}+1$.

$(\nu=2, 3, \ldots, n-1)$

Wie bei (B) sei

$q_1=\alpha\neq 1$ $\qquad$ $p_1=\alpha\neq 1$.

Wieder entstehen $n-1$ verschiedene $P(n)$ bei $\alpha=2, 3, \ldots, n$, wenn gesetzt wird:

1. $q_1=\alpha$; $q_\alpha=1$

2. $q_\nu=y_\nu$
3. $q_\nu=y_\nu+1$ $\Big\}$ für $\begin{Bmatrix} y_\nu<\alpha \\ y_\nu\geq\alpha \end{Bmatrix} 1<\nu<\alpha$

4. $q_{\nu+1}=y_\nu$
5. $q_{\nu+1}=y_\nu+1$ $\Big\}$ für $\begin{Bmatrix} y_\nu<\alpha \\ y_\nu\geq\alpha \end{Bmatrix} \alpha\leq\nu<n$

$Q$ ist eine $P(n)$, da alle Elemente $q=1, 2, \ldots, n$ vorhanden sind ($1<q<\alpha$ wegen 2. und 4.; $\alpha<q\leq n$ wegen 3. und 5., 1 und $\alpha$ wegen 1.).

$Q$ ist eigenstellenfrei, denn

2. $q_\nu=y_\nu\neq\nu$,
3. $q_\nu\geq\alpha+1>\nu+1$,
4. $q_{\nu+1}<\alpha<\nu+1$,
5. $q_{\nu+1}\neq\nu+1$.

Also ist $Q$ ein $c_n$.

mit $x_\lambda=n+1-\alpha$ (dadurch ist $\lambda$ für jedes $X$ und $\alpha$ definiert), $1\leq\lambda\leq n-1$

und dann

1. $p_\beta\equiv x_\beta+\alpha-1 \pmod{n-1}$ für $\beta\leq\lambda$
2. $p_\gamma\equiv x_{\gamma-1}+\alpha-1 \pmod{n-1}$ für $\gamma>\lambda$,

insbesondere

3. $p_\lambda=n$; $p_{\lambda+1}=1$.

$P$ ist (offensichtlich) eine $P(n)$,

und zwar sequenzfrei, weil

1. $p_{\beta+1}\equiv x_{\beta+1}+\alpha-1\not\equiv x_\beta+\alpha\equiv$
$\equiv p_\beta+1 \pmod{n-1}$ für $\beta<\lambda$
2. $p_{\gamma+1}\not\equiv x_{\gamma-1}+\alpha\equiv p_\gamma+1 \pmod{n-1}$ für $\gamma>\lambda$
3. $p_{\lambda+1}\neq p_\lambda+1$.

Also ist $P$ ein $c_n$.

$\underline{Y(Q)}$: Es ist $q_1=\alpha\neq 1$; $q_\alpha=1$;
$q_\mu\neq\mu$ $(\mu=1, 2, \ldots, n)$,

weil $Q$

$\underline{X(P)}$: Es ist $p_1=\alpha\neq 1$
$p_{\mu+1}\neq p_\mu+1$ $(\mu=1, 2, \ldots, n-1)$
und es gibt ein $\lambda$ so, daß
$p_\lambda=n$; $p_{\lambda+1}=1$,
weil $P$

als $c_n$ vorausgesetzt ist.

Wegen

1. $y_1 = 1$

2. $y_\nu = q_\nu$ } für $\begin{Bmatrix} q_\nu < \alpha \\ q_\nu > \alpha \end{Bmatrix}$ $1 < \nu < \alpha$
3. $y_\nu = q_\nu - 1$ }

4. $y_\nu = q_{\nu+1}$ } für $\begin{Bmatrix} q_{\nu+1} < \alpha \\ q_{\nu+1} > \alpha \end{Bmatrix}$ $\alpha \leq \nu < n$
5. $y_\nu = q_{\nu+1} - 1$ }

$x_\beta \equiv p_\beta - \alpha + 1 \pmod{n-1}$ für $\beta \leq \lambda$

$x_{\gamma-1} \equiv p_\gamma - \alpha + 1 \pmod{n-1}$ für $\gamma \geq \lambda + 1$

ist $Y$ eine $P(n-1)$, weil nach 1., 2. und 4. alle Elemente kleiner als $\alpha$, nach 3. und 5. alle von $\alpha$ bis $n-1$ auftreten; und man hat

2. $y_\nu = q_\nu \neq \nu$,
3. $y_\nu = q_\nu - 1 \geq \alpha > \nu$,
4. $y_\nu = q_{\nu+1} \leq \alpha - 1 < \nu$,
5. $y_\nu = q_{\nu+1} - 1 \neq \nu$.

ist $x_1 = 1$, $x_\lambda = n + 1 - \alpha$, und $X$ ist sequenzfrei; denn

$$\begin{aligned} x_{\beta+1} &\equiv p_{\beta+1} - \alpha + 1 \\ &\not\equiv p_\beta - \alpha + 2 \\ &\equiv x_\beta + 1 \pmod{n-1} \text{ für } \beta < \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\gamma+1} &\equiv p_{\gamma+2} - \alpha + 1 \\ &\not\equiv p_{\gamma+1} - \alpha + 2 \\ &\equiv x_\gamma + 1 \pmod{n-1} \\ &\text{für } \lambda \leq \gamma < n-1. \end{aligned}$$

Also ist

$Y$ $\qquad\qquad$ $X$

ein $a_{n-1}$ und (C) gilt, da die Abbildung

$Q(Y)$ $\qquad\qquad$ $P(X)$

bei festem $\alpha$ umkehrbar eindeutig ist.

Damit ist das Herstellungsverfahren aufgezeigt und zugleich die Formel (I) bewiesen.

## 3. Rekursionsformeln für $E_0(n)$, $Z_0(n)$, $S_0(n)$.

Zwischen den Anzahlen $a_n$ und $c_n$ besteht die Beziehung

$$c_n = a_n + (-1)^n.$$

Denn das gilt für $n = 1$, und durch vollständige Induktion von $n$ auf $n+1$ folgt wegen (C), (B), der Induktionsvoraussetzung und (A):

$$c_{n+1} = n a_n = b_n + a_n = b_n + c_n + (-1)^{n+1} = a_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Danach hat man

$$E_0(n) = b_n + c_n = a_n + b_n + (-1)^n = Z_0(n) + (-1)^n,$$

$$Z_0(n) = a_n + b_n = n a_n = n (b+c)_{n-1} = n E_0(n-1),$$

$$E_0(n) = b_n + c_n = (n-1)(b+c)_{n-1} + (n-1) a_{n-1} = (n-1)(a+b+c)_{n-1} = (n-1) S_0(n-1).$$

Dies liefert für die sukzessive Berechnung von $E_0(n)$, $S_0(n)$ und $Z_0(n)$ die Formeln

(II) $$\underline{E_0(n) = (n-1)\, S_0(n-1),}$$

(III) $$\underline{Z_0(n) = n\, E_0(n-1),}$$

(IV) $$\underline{E_0(n) = Z_0(n) + (-1)^n.}$$

Daraus erhält man durch einfaches Ausrechnen:

(V) $$E_0(n) = n\, E_0(n-1) + (-1)^n$$

(VI) $$Z_0(n) = n\,[Z_0(n-1) + (-1)^{n-1}]$$

(VII) $$S_0(n) = (n+1) E_0(n-1) + (-1)^n = \frac{(n^2-1)\, S_0(n-1) + (-1)^{n-1}}{n}$$

und weiter, zum Vergleich der drei Größen bei gleichem $n$:

(VII') $$(n+1) E_0(n) = n\, S_0(n) + (-1)^n, \qquad (n+1) Z_0(n) = n\,[S_0(n) + (-1)^{n-1}].$$

Hiermit berechnet man die Tabelle:

| $n$ | $E_0(n)$ | $Z_0(n)$ | $S_0(n)$ | $n$ | $E_0(n)$ | $Z_0(n)$ | $S_0(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 6 | 265 | 264 | 309 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 7 | 1854 | 1855 | 2119 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 8 | 14833 | 14832 | 16687 |
| 4 | 9 | 8 | 11 | 9 | 133496 | 133497 | 148329 |
| 5 | 44 | 45 | 53 | 10 | 1334961 | 1334960 | 1468457 |

## 4. Zusammenhang mit den Näherungssummen für $\frac{1}{e}$.

Man definiere $\alpha_n$ und $\varepsilon_n$ durch

$$\alpha_0 = 1, \quad \nu\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 0 \ (\nu \geq 0); \quad \varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \quad (n \geq 0).$$

Dann hat man

(1) $$\alpha_\nu \cdot \nu! = (-1)^\nu$$

(2) $$e \cdot \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1.$$

Sei weiter $\varphi(n, \lambda)$ definiert durch

(3) $$\varphi(n, 0) = \varphi_n = (n+1)\, \varepsilon_{n+1}, \quad \varphi(n, \lambda) = (n+1-\lambda)\, \varepsilon_{n+1-\lambda} + \sum_{i=1}^{\lambda} \varepsilon_{n-i} \ (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist

(4) $$\varphi(n, \lambda) = \varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i.$$

**Beweis** (durch Induktion nach $\lambda$). Zunächst ist

$$\varphi(n, 1) = n\,\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = (n+1)\varepsilon_n - \alpha_n = (n+1)(\varepsilon_n + \alpha_{n+1}) = \varphi_n$$

und weiter

$$\varphi(n, \lambda+1) - \varphi(n, \lambda) = (n-\lambda)\varepsilon_{n-\lambda} + \varepsilon_{n-\lambda-1} - (n+1-\lambda)\varepsilon_{n+1-\lambda} =$$
$$= \varphi(n-\lambda, 1) - \varphi(n-\lambda, 0) = 0.$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt, indem man $\lambda = n$ setzt in (3).

Nunmehr sei

(5) $$n!\,\varepsilon_n = \psi_n.$$

Dann ist wegen (1)

$$n!\,\varepsilon_n - n(n-1)!\,\varepsilon_{n-1} = (-1)^n,$$

also

(6) $$\psi_n = n\psi_{n-1} + (-1)^n.$$

Wegen (3) und (5) ist $n!\,\varphi_n = \psi_{n+1}$, also wegen (6)

$$n!\,\varphi_n = (n+1)(n-1)!\,\varphi_{n-1} + (-1)^{n+1},$$

und setzt man schließlich

(7) $$(n-1)!\,\varphi_n = \sigma_n,$$

so hat man

(8) $$n\sigma_n + (-1)^n = (n^2-1)\,\sigma_{n-1}.$$

Also folgt[4]) durch Vergleich von (6) und (8) mit den Rekursionsformeln (V) und (VII), sowie aus (III)

$$E_0(n) = \psi_n, \qquad S_0(n) = \sigma_n, \qquad Z_0(n) = n\psi_{n-1}.$$

Nach (5) und (7) ist daher:

(9) $$\underline{E_0(n) = n!\,\varepsilon_n,}$$

(10) $$\underline{S_0(n) = (n+1)(n-1)!\,\varepsilon_{n+1},}$$

(11) $$\underline{Z_0(n) = n!\,\varepsilon_{n-1}.}$$

Setzt man in

(12) $$S_0(n) = (n-1)!\,\varphi(n,\lambda)$$

speziell $\lambda = 2$ (oder auch $\lambda = 1$, was auf ein und dasselbe hinausläuft), so folgt

(13) $$S_0(n) = (n-1)!\,(n\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}) = (n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}(n\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}) = (n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}(n-\nu)\alpha_\nu$$
$$= (n-1)!\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu\left(\frac{n-\nu}{\nu!}\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu\binom{n-1}{\nu}(n-\nu)!\,^{5)}.$$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich aus (12) mittels (3) und (9) die Formel (I):

$$S_0(n) = E_0(n) + E_0(n-1),$$

für $\lambda = 2$ entsprechend:

$$S_0(n) = Z_0(n) + Z_0(n-1).$$

## 5. Fortsetzung der Abbildung $E \leftrightarrow S$.

Alle weiteren $P(n)$ sollen — wie jetzt beschrieben wird — durch *Dilatation* mit schrittweiser Vergrößerung der Eigenstellen- bzw. Sequenzzahl um je 1 erzeugt werden. Die $E_0(n)$ oder $E_1(n)$ bzw. $S_0(n)$, aus der $P(N)$ entsteht, werde als *Stammpermutation von* $P(N)$ bezeichnet.

---

[4]) Die Formeln gelten offensichtlich für $n = 1$.

[5]) Wie a. a. O.[1]) auf anderem Wege gezeigt wurde.

**Dilatation**

| $E$ | $S$ |
|---|---|

Es sei wieder

$Y = y_1 y_2 \cdots y_{n-1}$ $\qquad$ $X = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$

eine $P(n-1)$ und

$Q = q_1 q_2 \cdots q_n$ $\qquad$ $P = p_1 p_2 \cdots p_n$

die erzeugte $P(n)$. Entweder gibt es ein $\omega$ so, daß

$y_\omega = \omega,\ y_\nu \neq \nu$ [6] $\qquad$ $x_\lambda = v_{\lambda-1} + 1 = \omega;$
$x_\mu \neq x_{\mu-1} + 1 = \nu$ [6]

für $\omega < \nu \leq n$ oder es ist

$Y$ eine $E_\theta(n-1)$ $\qquad$ $X$ eine $S_\theta(n-1)$.

In diesem Fall sei $\omega = 1$. Es werde $\nu$ fest gewählt $(\omega < \nu \leq n)$.

Dann ist also $\mu$ bestimmt und $1 < \mu \leq n$.

Man setze

| | |
|---|---|
| 1. $q_\nu = \nu$ | 1. $p_\mu = \nu$ |
| 2. $q_\beta = y_\beta$ <br> 3. $q_\beta = y_\beta + 1$ $\Big\}$ für $\begin{Bmatrix} y_\beta < \nu \\ y_\beta \geq \nu \end{Bmatrix} \beta < \nu$ | 2. $p_\beta = x_\beta$ <br> 3. $p_\beta = x_\beta + 1$ $\Big\}$ für $\begin{Bmatrix} x_\beta < \nu \\ x_\beta \geq \nu \end{Bmatrix} \beta < \mu$ |
| 4. $q_\gamma = y_{\gamma-1}$ <br> 5. $q_\gamma = y_{\gamma-1} + 1$ $\Big\}$ für $\begin{Bmatrix} y_{\gamma-1} < \nu \\ y_{\gamma-1} \geq \nu \end{Bmatrix} \gamma > \nu$ | 4. $p_\gamma = x_{\gamma-1}$ <br> 5. $p_\gamma = x_{\gamma-1} + 1$ $\Big\}$ für $\begin{Bmatrix} x_{\gamma-1} < \nu \\ x_{\gamma-1} \geq \nu \end{Bmatrix} \gamma > \mu$ |

Dann hat

$Q$ alle Eigenstellen von $Y$, dazu $q_\nu = \nu$; aber keine weiteren Eigenstellen.

$P$ alle Sequenzen von $X$, dazu $\nu-1, \nu$; aber keine weiteren Sequenzen.

**Beweis.** Falls

$y_\varrho = \varrho$ $\qquad$ $x_{\sigma-1} = \varrho - 1;\ x_\sigma = \varrho$, also $\sigma \neq \mu$,

so ist nach der Definition von $\omega$

$$\varrho \leq \omega < \nu.$$

Also ist auch $y_\varrho < \nu$ und wegen 2.

$q_\varrho = \varrho$.

Für $\sigma < \mu$ ist wegen 2.

$p_{\sigma-1} = \varrho - 1;\ p_\sigma = \varrho$.

Für $\sigma > \mu$ ist wegen 4.

$p_\sigma = \varrho - 1;\ p_{\sigma+1} = \varrho$.

Danach ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Sei weiter

$\tau$ keine Eigenstelle von $Y$, also $y_\tau \neq \tau$.

$\tau - 1, \tau$ keine Sequenz von $X$, also $x_{\sigma-1} = \tau - 1;\ x_\sigma \neq \tau$.

Für $\tau = \nu$ ist wegen 1.

$q_\tau = \tau$

$p_\sigma = \tau$ (da $\sigma = \mu$ folgt und umgekehrt) und wegen 2.

$p_{\sigma-1} = \tau - 1$,

wie behauptet.

[6] Für $\nu = n$ bzw. $\mu = n$ soll diese Ungleichung gelesen werden: *Es gibt kein $y_\nu$ bzw. $x_\mu$*; analog in späteren Fällen.

Sei also weiter $\tau \neq \nu$, also $\sigma \neq \mu$,

und

a. $\tau < \nu$.

a1. $y_\tau < \nu$;

wegen 2. ist

$q_\tau \neq \tau$

a2. $y_\tau \geq \nu$;

wegen 3. ist

$q_\tau \geq \nu + 1 > \tau$

b. $\tau > \nu$.

b1. $y_{\tau-1} > \nu$;

wegen 4. ist

$q_\tau < \nu < \tau$

b2. $y_{\tau-1} \geq \nu > \omega$;

wegen 5. ist

$q_\tau = y_{\tau-1} + 1 \neq \tau$,

weil sonst $y_{\tau-1} \leq \omega$ sein müßte.

a. $\sigma < \mu$.

a1. $\tau < \nu$, also $\tau - 1 < \nu$ und wegen 2.

$p_{\sigma-1} = \tau - 1$;

falls $x_\sigma < \nu$, ist wegen 2.

$p_\sigma \neq \tau$,

falls $x_\sigma \geq \nu$, ist wegen 3.

$p_\sigma \geq \nu + 1 > \tau$.

a2. $\tau > \nu$, also $\tau - 1 \geq \nu > \omega$ und

$p_{\sigma-1} = \tau$ wegen 3.;

falls $x_{\sigma-2} < \nu$, ist wegen 2.

$p_{\sigma-2} < \nu \leq \tau - 1$;

falls $x_{\sigma-2} \geq \nu$, ist wegen 3.

$p_{\sigma-2} = x_{\sigma-2} + 1 \neq \tau - 1$,

weil $x_{\sigma-1} = \tau - 1 > \omega$.

b. $\sigma > \mu$.

b1. $\tau < \nu$, also $\tau - 1 < \nu$, und wegen 4.

$p_\sigma = \tau - 1$[7]);

falls $x_\sigma < \nu$, ist wegen 4.

$p_{\sigma+1} \neq \tau$;

falls $x_\sigma \geq \nu$, ist wegen 5.

$p_{\sigma+1} > x_\sigma \geq \nu > \tau$.

b2. $\tau > \nu$, also $\tau - 1 \geq \nu$;

wegen 5. ist $p_\sigma = \tau$; für $\sigma = \mu + 1$ ist wegen 1.

$p_{\sigma-1} = \nu \neq x_\mu = \tau - 1$;

sonst ist $\sigma - 1 > \mu$,

also, falls $x_{\sigma-2} < \nu$, wegen 4. $p_{\sigma-1} \leq \nu - 1 < \tau - 1$ und falls $x_{\sigma-2} \geq \nu > \omega$, wegen 5.

$p_{\sigma-1} = x_{\sigma-2} + 1 \neq x_{\sigma-1} = \tau - 1$.

Also enthält

$Q$ die Eigenstelle $\tau$ nicht, $P$ die Sequenz $\tau - 1$, $\tau$ nicht,

sobald $\tau \neq \nu$ ist.

Damit sind alle Behauptungen bewiesen.

---

[7]) Für $\sigma = n$ ist also die Sequenz $\tau - 1$, $\tau$ nicht in $P$ vorhanden. Daher sei weiter $\sigma < n$. Diese Bemerkung ist hier nötig, weil weiter $x_\sigma$ auftritt, das für $\sigma = n$ nicht existiert.

Ferner ist $q_1 = p_1$ für $y_1 = x_1$, was sofort aus dem Vergleich von 2. und 3. bei $E$ und $S$ für $\beta = 1$ folgt.

Die Zuordnung $E \leftrightarrow S$ soll nun so geschehen, daß aus einander zugeordneten $E(n-1) \leftrightarrow S(n-1)$ durch Dilatation mit gleichem $\nu$ entstandene $E(n) \leftrightarrow S(n)$ einander zugeordnet werden.

Es ist dann $y_1 = x_1$ und $\omega = 1$ zunächst in zugeordneten Stammpermutationen; weiter ist nach dem Dilatationsverfahren — wenn $\bar{n} = n+1$ und analog durch Überstreichen die verschiedenen Größen für den folgenden Schritt bezeichnet werden — auch $\bar{y}_1 = q_1 = p_1 = \bar{x}_1$ und $\bar{\omega} = \nu$ bei $E$ und $S$. Es ist daher zugleich mit der Beschreibung der Dilatation induktiv der Beweis geführt worden, daß zugeordnete $P(n)$ gleiche Anfangselemente und gleiche $\omega$ (bzw. $\nu$) haben.

Bei festem $\nu$ ist die Abbildung $Q(Y)$ bzw. $P(X)$ umkehrbar eindeutig. Die Umkehrung $Y(Q)$ bzw. $X(P)$ werde als **Reduktion** bezeichnet. Damit ist die Abbildung $E \leftrightarrow S$ hergestellt.

## 6. Zweite Beschreibung von Dilatation und Reduktion.

Die beiden Verfahren Dilatation und Reduktion können — weniger genau, aber viel übersichtlicher — auch wie folgt beschrieben werden:

**Dilatation.**

| $E$ | $S$ |
|---|---|
| Sei $\omega$ das größte Element, das in | |
| $Y$ als Eigenstelle | $X$ als zweites Element einer Sequenz |

steht, bzw. $\omega = 1$, falls ein solches Element nicht existiert; man wähle $\nu > \omega$, rücke alle Elemente, die rechts

| | |
|---|---|
| der Stelle $\nu - 1$ in $Y$ | von $\nu - 1$ in $X$ |

stehen, um eine Stelle nach rechts, vergrößere jedes Element

| | |
|---|---|
| $y \geq \nu$ | $x \geq \nu$ |

um 1 und setze $\nu$

| | |
|---|---|
| an die Stelle $\nu$ | hinter $\nu - 1$. |

Die entstandene $P(n)$ ist

| | |
|---|---|
| $Q$ | $P$. |

**Reduktion.**

Sei $\nu > 1$ das größte Element, das in

| | |
|---|---|
| $Q$ als Eigenstelle | $P$ als zweites Element einer Sequenz |

steht. Man streiche $\nu$ und verkleinere jedes Element, das größer ist als $\nu$, um 1. Die entstandene $P(n-1)$ ist

| | |
|---|---|
| $Y$ | $X$. |

Alle oben (beim Verfahren Dilatation) bewiesenen Behauptungen sind anschaulich unmittelbar einleuchtend.

## 7. Die Formeln $E_k(n)$, $S_k(n)$, $Z_k(n)$.

Nach dem Dilatationsverfahren ist jeder $P(N)$ eindeutig eine Stammpermutation zugeordnet, und umgekehrt bestimmt jede Stammpermutation eine wohlbestimmte Menge der aus ihr entstandenen $P(N)$.

Die Stammpermutationen der

$E_k(N)$ $\qquad$ $Z_k(N)$ bzw. $S_k(N)$

sind die

$(b+c)_{N-k}$ und die $a_{N-k+1}$ $\qquad$ $(a+b)_{N-k}$ und die $c_{N-k+1}$ bzw. die $(a+b+c)_{N-k}$.

Es seien $h$

Eigenstellen $\beta$ $\qquad$ Sequenzen $\beta-1$, $\beta$

$(\beta=2, 3, \ldots, N)$

gewählt. Von diesen sollen $k$ in $P_k(N)$ auftreten[8]). Die Anzahl der möglichen $P_k(N)$ sei

$E_{kh}(N)$. $\qquad$ $Z_{kh}(N)$ bzw. $S_{kh}(N)$.

Dann hat man

$$\text{(VIII)}\quad E_{kh}(N)=\binom{h}{k}E_0(N-k). \qquad Z_{kh}(N)=\binom{h}{k}Z_0(N-k);$$

$$S_{kh}(N)=\binom{h}{k}S_0(N-k).$$

Ist unter den $h$ gewählten auch

$\beta=1$ $\qquad$ die Zyklussequenz $N, 1$ (bei $S$ hat dieser Fall keinen Sinn)

vorhanden, so gilt[9])

$$E^*_{kh}(N)=\binom{h-1}{k}(b+c)_{N-k}+\binom{h-1}{k-1}a_{N-k+1}=\binom{h}{k}E_0(N-k)$$

$$Z^*_{kh}(N)=\binom{h-1}{k}(a+b)_{N-k}+\binom{h-1}{k-1}c_{N-k+1}=\binom{h}{k}Z_0(N-k).$$

Speziell, wenn beliebige $k$

Eigenstellen $\qquad$ Sequenzen bzw. Zyklussequenzen

auftreten:

$$\text{(Va)}\qquad E_{kN}(N)=\underline{E_k(N)=\binom{N}{k}E_0(N-k)},$$

$$\text{(VIa)}\qquad \underline{Z_k(N)}=Z_{kN}(N)=\underline{\binom{N}{k}Z_0(N-k)},$$

$$\text{(VIIa)}\qquad S_{k,N-1}(N)=\underline{S_k(N)=\binom{N-1}{k}S_0(N-k)}.$$

[8]) $P_k(N)$ soll bedeuten: Eine $P(N)$ mit $k$ Eigenstellen bzw. $k$ Sequenzen bzw. $k$ Zyklussequenzen.

[9]) Der Stern soll andeuten, daß auch 1 bzw. $N$, 1 zugelassen ist. Wie sich sofort erweist, sind die mit * versehenen Größen den gleich bezeichneten ohne * gleich (soweit diese vorhanden sind; für $h=N$ soll durch Definition $E^*=E$ und $Z^*=Z$ sein).

Aus (V) und (Va) folgen die Rekursionsformeln

$$n E_k(n-1) = (k+1) E_{k+1}(n) = E_k(n) + (-1)^{n-k-1}\binom{n}{k}.$$

Analog aus (VI) und (VIa):

$$n Z_k(n-1) = (k+1) Z_{k+1}(n) = Z_k(n) + n(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k}$$

und aus (VII) und (VIIa):

$$(n-1)(n+1-k) S_k(n-1) = (k+1)(n+1-k) S_{k+1}(n)$$
$$= (n-k) S_k(n) + (-1)^{n-k}\binom{n-1}{k}.$$

Ferner geben (II), (Va) und (VIIa)

$$(n-k+1) E_k(n+1) = n(n+1) S_k(n)$$

und

$$(n-k+1) E_{k-1}(n) = n k S_k(n).$$

Entsprechend (VII'), (Va) und (VIIa):

$$(n-k+1) E_k(n) = n S_k(n) + (-1)^{n-k}\binom{n}{k}$$

und (I), (Va) und (VIIa):

$$k S_k(n) + E_{k-1}(n-1) = S_{k-1}(n).$$

## 8. Auswahl aus vorgeschriebenen Eigenstellen oder Sequenzen.

Es läßt sich eine Abbildung $E(n) \leftrightarrow \bar{E}(n)$ der $P(n)$ auf sich mit folgenden Eigenschaften herstellen:

1. $E(n)$ und $\bar{E}(n)$ haben gleichviel Eigenstellen.
2. Jeder Eigenstelle $e_i$ in $E(n)$ entspricht eine bestimmte Eigenstelle $\bar{e}_i$ in $\bar{E}(n)$.
3. Die Zuordnung $e_i \leftrightarrow \bar{e}_i$ ist beliebig unter den $P(n)$ wählbar.

Man braucht dazu nur (nachdem eine $P(n)$ für die Zuordnung $e_i \leftrightarrow \bar{e}_i$ gewählt ist) in $\bar{E}(n)$ an Stelle der in $E_k(n)$ vorhandenen [10]) Eigenstellen $e_i$ die Eigenstellen $\bar{e}_i$ zu nehmen. Die übrigen Elemente von $E_k(n)$ seien, nach aufsteigender Größe geordnet, $f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}$. Ihre Indizes bilden in der Reihenfolge, wie sie in $E_k(n)$ stehen, eine $E_0(n-k)$. Nennt man die analogen $n-k$ noch nicht festgelegten Elemente von $\bar{E}(n)$, nach der Größe geordnet, $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_{n-k}$, unterwirft deren Indizes der $E_0(n-k)$ und schreibt die $\bar{f}_\nu$ in der geänderten Reihenfolge an die freien Stellen von $\bar{E}(n)$, so sind alle geforderten Bedingungen erfüllt.

Es sei $Q_k(\lambda, n)$ die Anzahl der $P(n)$ mit genau $k$ Eigenstellen, die unter $\lambda$ vorgeschriebenen Eigenstellen gewählt sind, wobei es gleichgültig sein soll, ob noch weitere (der übrigen $n-\lambda$ möglichen) Eigenstellen in $P(n)$ auftreten oder nicht.

$Q_k(\lambda, n)$ ist nach dem eben Gesagten unabhängig davon, welche $\lambda$ Eigenstellen vorgeschrieben wurden. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n-\lambda+1$, $n-\lambda+2, \ldots, n$ als die $\lambda$ vorgeschriebenen Eigenstellen wählen.

Es ist also

$$\text{(IX)} \qquad Q_k(\lambda, n) = \binom{\lambda}{k} Q_0(\lambda-k, n-k),$$

weil jedes $Q_0(\lambda-k, n-k)$ auf $\binom{\lambda}{k}$ Arten zu einem $Q_k(\lambda, n)$ dilatiert werden kann [11]).

---

[10]) Der Index $k$ an $E(n)$ soll wie früher die Anzahl der vorhandenen Eigenstellen angeben; also $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

[11]) Es sollen auch in $Q_0(\lambda-k, n-k)$ die $\lambda-k$ größten Elemente als Eigenstellen vorgeschrieben sein, also *nicht* in $Q_0(\lambda-k, n-k)$ auftreten.

Zur Bestimmung von $Q_0(\lambda, n)$ hat man: Für $\lambda < n$ enthält $Q_0(\lambda, n)$

1. alle $P(n)$, die (außer den $\lambda$ verbotenen) auch die Eigenstelle $n-\lambda$ nicht enthalten,
2. alle $P(n)$, die die Eigenstelle $n-\lambda$, aber keine höhere enthalten.

Die unter 2. genannten gehen durch eine Dilatation aus den $Q_0(\lambda, n-1)$ hervor, die $n-\lambda$, $n-\lambda+1, \ldots, n-1$ nicht als Eigenstellen enthalten. Also hat man[12])

$$\text{(X)} \qquad Q_0(\lambda, n) = Q_0(\lambda+1, n) + Q_0(\lambda, n-1)$$

und durch Iterieren dieser Zerlegung:

$$\text{(XI)} \qquad \underline{Q_0(\lambda, n) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} Q_0(\lambda+\mu-\nu, n-\nu)} \qquad \text{für} \quad \mu = 0, 1, \ldots, n-\lambda.$$

Speziell folgt für $\mu = n-\lambda$:

$$\text{(XIa)} \qquad Q_0(\lambda, n) = \sum_{\nu=0}^{n-\lambda} \binom{n-\lambda}{\nu} Q_0(n-\nu, n-\nu) = \sum_{\nu=0}^{n-\lambda} \binom{n-\lambda}{\nu} E_0(n-\nu)\ ^{13)}.$$

Schreibt man (X) in der Form

$$\text{(Xa)} \qquad Q_0(\lambda, n) = Q_0(\lambda-1, n) - Q_0(\lambda-1, n-1) \qquad (0 < \lambda \leq n)$$

und iteriert, so folgt

$$\text{(XII)} \qquad Q_0(\lambda, n) = \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu \binom{\mu}{\nu} Q_0(\lambda-\mu, n-\nu) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \lambda).$$

Speziell ergibt sich für $\mu = \lambda$

$$\text{(XIIa)} \qquad \underline{Q_0(\lambda, n) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \binom{\lambda}{\nu} Q_0(0, n-\nu) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \binom{\lambda}{\nu} (n-\nu)!}$$

und weiter spezialisiert für $\lambda = n$ die Formel (9) aus § 4.

Da bei der Abbildung $E \leftrightarrow S$ die Eigenstellen $e_i$ in die Sequenzen $e_i - 1$, $e_i$ (bzw. die Eigenstelle 1 in sich) übergehen, könnte man $Q_k(\lambda, n)$ ebensogut als Anzahl der $P(n)$, in denen $k$ von $\lambda$ vorgeschriebenen Sequenzen vorhanden sind, definieren. Dabei kann (nach Belieben) unter den $\lambda$ Sequenzen auch die Eigenstelle 1 als „Sequenz" vorgeschrieben (und natürlich dann auch unter den $k$ vorhandenen mitgezählt) werden.

Speziell ergibt (XIIa) für $\lambda = n-1$ die Formel (13) von § 4.

## 9. Anwendung auf $d$-Progressionen.

Definiert man (vgl. § 1) eine $d$-Progression als Aufeinanderfolge von zwei Elementen $p_\nu$ und $p_{\nu-1}$ mit $p_\nu = p_{\nu-1} + d$ in $P(n)$ und fragt nach der Anzahl ${}_dP_k(n)$ der $P(n)$ mit genau $k$ $d$-Progressionen, so ergibt sich[14])

$$\text{(XIII)} \qquad \underline{{}_dP_k(n) = Q_k(n-d, n)} \qquad (0 \leq d \leq n;\ 0 \leq k \leq n-d),$$

weil die $P(n)$ so auf sich abgebildet werden können, daß die ${}_dP_k(n)$ auf bestimmte $Q_k(n-d, n)$ übergehen.

**Beweis.** Es sei

$$n = \mu d + \nu,\ 0 \leq \nu < d;\ \alpha_i = 1, 2, \ldots, \nu;\ \beta_j = \nu+1, \nu+2, \ldots, d$$

---

[13]) Das folgt auch wegen $Q_0(\lambda, n) = \sum_{i=0}^{n-\lambda} E_{i, n-\lambda}(n)$ (es stehen rechts als Summanden die Anzahlen der $P(n)$ mit $i$ der zugelassenen $n-\lambda$ Eigenstellen) aus der Formel (VIII).

[14]) Als 0-Progression soll die Eigenstelle bezeichnet werden. Der Beweis für (XIII) gilt nicht für $d=0$; doch ist die Formel (XIII) in diesem Fall trivial.

[12]) Genau genommen muß noch $Q_0(0,0) = 1$ definiert werden, damit die Formel auch für den trivialen Fall $n=1$ gilt.

(falls $\nu=0$, gibt es keine $\alpha_i$). Es gibt $n-d$ verschiedene mögliche $d$-Progressionen, die mit $d+1, d+2, \ldots, n$ abschließen, und die Permutation [15])

$$T=\begin{pmatrix} \alpha_i+\varrho d & \beta_j+\sigma d \\ 1\,2\ldots\nu(\mu+1) & \nu(\mu+1)+1\ldots n \end{pmatrix} \qquad (\varrho=0,1,2,\ldots,\mu;\ \sigma=0,1,2,\ldots,\mu-1)$$

führt jede $d$-Progression in eine bestimmte Sequenz über, womit alles bewiesen ist.

Also hat man nach (XIII) und (XI) bzw. (XII)

$$\text{(XIb)} \qquad {}_dP_0(n)=\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}_{d-\mu}P_0(n-\nu) \qquad (\mu=0,1,2,\ldots,d),$$

$$\text{(XIIb)} \qquad {}_dP_0(n)=\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^{\nu}\binom{\mu}{\nu}_{d+\mu-\nu}P_0(n-\nu) \qquad (\mu=0,1,\ldots,n-d).$$

Speziell folgt für $\mu=d$ bzw. $\mu=d-1$ aus (XIb) und für $\mu=n-d$ aus (XIIb)

$$\text{(XIc)} \qquad {}_dP_0(n)=\sum_{\nu=0}^{d}\binom{d}{\nu}E_0(n-\nu),$$

$$\text{(XId)} \qquad {}_dP_0(n)=\sum_{\nu=0}^{d-1}\binom{d-1}{\nu}S_0(n-\nu),$$

$$\text{(XIIc)} \qquad {}_dP_0(n)=\sum_{\nu=0}^{n-d}(-1)^{\nu}\binom{n-d}{\nu}(n-\nu)!$$

Seien $h$ $d$-Progressionen vorgeschrieben (also $h\leq n-d$), von denen genau $k$ in $P(n)$ auftreten sollen ($0\leq k\leq h$). Die übrigen $n-d-h$ $d$-Progressionen sollen

a) nicht in $P(n)$ auftreten. Die zugehörige Anzahl der $P(n)$ sei ${}_dP_{kh}(n)$;

b) in beliebiger Zahl in $P(n)$ vorhanden sein. Die zugehörige Anzahl der $P(n)$ sei ${}_dP_k(h,n)$.

Die $P(n)$ werden zunächst der obigen Permutation $T$ unterworfen. Dann ist jede $d$-Progression auf eine bestimmte Sequenz abgebildet. Es sei $S(n)$ das Bild von $P(n)$.

Weiter werden durch $S(n)\to E(n)$ diese $n-d$ Sequenzen auf bestimmte Eigenstellen und durch $E(n)\to\bar{E}(n)$ diese Eigenstellen so auf die letzten $n-d$ Eigenstellen abgebildet, daß die letzten $h$ Eigenstellen in $\bar{E}(n)$ die Bilder der $h$ vorgeschriebenen $d$-Progressionen sind.

Ad a). Die Bilder $\bar{E}(n)$ der ${}_dP_{kh}(n)$ gehen durch $k$ Reduktionen auf die $P(n-k)$ über, die die letzten $n-d-k$ Eigenstellen nicht enthalten. Umgekehrt kann jede solche $P(n-k)$ auf $\binom{h}{k}$ Arten durch $k$ Dilatationen (an $k$ der Stellen $n-h+1, n-h+2,\ldots,n$) auf Bilder der ${}_dP_{kh}(n)$ gebracht werden. Also ist

$$\text{(XIV)} \qquad {}_dP_{kh}(n)=\binom{h}{k}Q_0(n-d-k,n-k)=\binom{h}{k}{}_dP_0(n-k),$$

in voller Analogie zu (VIII) in § 7.

Ad b). In diesem Falle gilt:

$$\text{(XV)} \qquad {}_dP_k(h,n)=Q_k(h,n)={}_{n-h}P_k(n)={}_{n-h}P_{kh}(n)=\binom{h}{k}{}_{n-h}P_0(n-k).$$

Speziell folgt für $h=n-d$ aus (XIV) oder (XV)

$$\text{(XVa)} \qquad {}_dP_{k,\,n-d}(n)={}_dP_k(n-d,n)={}_dP_k(n)=\binom{n-d}{k}{}_dP_0(n-k),$$

in Analogie zu (Va) und (VIIa) von § 7.

---

[15]) Hier sollen alle Elemente $\alpha_i+\varrho d$ mit festem $\alpha_i$ und monoton wachsenden $\varrho$ aufeinanderfolgen. Analog bei $\beta_j+\sigma d$.

Aus (XIV) folgt speziell für $k=h$:

(XIVa) $$ {}_dP_{hh}(n) = {}_dP_0(n-h), $$

d. h. es gibt genau so viele $P(n)$ mit $h$ vorgeschriebenen $d$-Progressionen (und keinen anderen) wie es $P(n-h)$ ohne $d$-Progressionen gibt.

Man erhält also für die ${}_dP_0(n)$ bzw. $Q_0(\lambda, n)$ die folgende Tabelle:

| $n$ \ $d$ | $\lambda$ | | | | | | | | | | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 0 | 0 | | | | | |
| 0 | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | 0 |
| 1 | | | 2 | 1 | 0 | 2 | | | | | 1 |
| 2 | | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | | | | | 2 |
| 3 | 4 | 6 | 4 | 3 | 2 | 4 | | | | | 3 |
| 4 | 5 | 24 | 18 | 14 | 11 | 9 | 5 | | | | 4 |
| 5 | 6 | 120 | 96 | 78 | 64 | 53 | 44 | 6 | | | 5 |
| 6 | 7 | 720 | 600 | 504 | 426 | 362 | 309 | 265 | 7 | | 6 |
| 7 | 5040 | 4320 | 3720 | 3216 | 2790 | 2428 | 2119 | 1854 | | | 7 |

Die Reihe $\lambda=$const. ist — vgl. (XIIa) — die $\lambda$-te Differenzenfolge der Folge

$$ Q_0(0, n) = n! $$

Die Reihe $d=$const. ist — vgl. (XIc) — die $d$-te Summenfolge der Folge

$$ {}_0P_0(n) = E_0(n). $$

Legt man die Spitze des Pascaldreiecks auf $\lambda, n$ und die Zeile $\binom{h}{k}$ auf einen Teil der Reihe $d=$const. (die Spitze links und die 1-Reihen des Pascaldreiecks auf die Reihen $n=$konst. und $\lambda=$const.), so hat man

$$ \lambda + d + h = n. $$

Die Faltung der Zeile $\binom{h}{k}$ mit dem darunter liegenden Teil der $d$-Reihe ergibt nach (XIb) die unter der Spitze liegende Zahl

$$ {}_{d+h}P_0(n) = Q_0(\lambda, n) = {}_dP_0(\lambda, n) $$

wegen (XIII) und (XV), also die Zahl der $P(n)$, die $\lambda$ bestimmte $d$-Progressionen nicht enthalten. Die Summanden der Faltung sind nach (XIV) die ${}_dP_{kh}(n)$, also die Anzahlen der $P(n)$, die von den $h$ übrigen $d$-Progressionen genau $k$ enthalten.

Dabei sind die unter der Zeile $\binom{h}{k}$ liegenden Zahlen der Tabelle die Zahlen

$$ {}_dP_0(n-k) = {}_dP_{kk}(n) $$

nach (XIVa), also die Anzahlen der $P(n)$, die genau $k$ bestimmte der $h$ vorgeschriebenen $d$-Progressionen enthalten.

**Beispiel:** $\lambda=1$; $n=6$; $h=3$; $d=2$.

Es gibt 600 $P(6)$, die die 2-Progression 3,5 nicht enthalten (trivialerweise richtig). Von diesen enthalten 362 gar keine 2-Progressionen, je 64 entweder 1,3 oder 2,4 oder 4,6 (aber keine andere), also 192 genau eine außer 3,5; je 14 genau zwei bestimmte der genannten und 42 zwei beliebige von ihnen, aber keine weiteren; schließlich 4 alle drei aber nicht 3,5 (das letzte wieder trivialerweise richtig).

## 10. Rekursionsformeln für ${}_dP_0(n)$.

Die Berechnung dieses Dreiecksschemas ist einfach genug, doch läßt sich der Aufbau der Werte $Q_0(\lambda, n) = {}_dP_0(n)$ noch klarer darstellen, wenn man beachtet, daß aus

$$ {}_dP_0(n+1) = {}_{d+1}P_0(n+1) - {}_dP_0(n) \text{ und } {}_dP_0(d) = d!$$

die Kongruenz

$$ {}_dP_0(n) \equiv 0 \pmod{d!}$$

folgt und daher in der Relation

$$ {}_dP_0(n) = Q_0(\lambda, n) = (n-\lambda)!\, q_\lambda(n)$$

die $q_\lambda(n)$ ganze Zahlen sind. Weiter folgt aus (Xa) in § 8:

$$(\mathrm{q}_1) \qquad q_\lambda(n) = (n-\lambda+1)q_{\lambda-1}(n) - q_{\lambda-1}(n-1),$$

und da $q_0(n)=1$ ist, sind die $q_\lambda(n)$ Polynome in $n$ vom Grade $\lambda$ mit ganzzahligen Koeffizienten (bei $n^\lambda$ steht 1, die $q_\lambda(n)$ sind also normiert). Die ersten $q_\lambda(n)$ sind:

| $\lambda$ | $q_\lambda(n)$ | $\lambda$ | $q_\lambda(n)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $1$ | 3 | $n^3-6n^2+14n-13$ |
| 1 | $n-1$ | 4 | $n^4-10n^3+41n^2-84n+73$ |
| 2 | $n^2-3n+3$ | 5 | $n^5-15n^4+95n^3-325n^2+609n-501.$ |

Aus $(\mathrm{q}_1)$ folgt durch einen Induktionsschluß von $\lambda$ auf $\lambda+1$:

$$(\mathrm{q}_2) \qquad q_\lambda(n) = q_\lambda(n-1) + \lambda q_{\lambda-1}(n-1).$$

Für den Beweis verwende man die Definitionsgleichung $(\mathrm{q}_1)$ für $\lambda$, $n-1$; $\lambda+1$, $n-1$; $\lambda+1, n$ und die Induktionsvoraussetzung $(\mathrm{q}_2)$ für $\lambda, n$; $\lambda, n-1$.

Aus $(\mathrm{q}_1)$ und $(\mathrm{q}_2)$ ergeben sich durch einfache Rechnung viele ähnliche Beziehungen zwischen jeweils drei Werten $q_\lambda(n)$, z. B.

$$(n+1)q_\lambda(n-1) = (n-\lambda)q_\lambda(n) + q_\lambda(n-2), \qquad nq_\lambda(n-1) = q_{\lambda+1}(n) + q_\lambda(n-2,)$$

$$q_{\lambda+1}(n+1) = nq_\lambda(n) + \lambda\cdot q_{\lambda-1}(n-1), \qquad q_{\lambda+1}(n) = (n-\lambda-1)q_\lambda(n) + \lambda q_{\lambda-1}(n-1).$$

(Es ist übrigens $q_\lambda(\lambda-1) = (-1)^\lambda$, wie sofort zu bestätigen ist.) Jede dieser Formeln gibt natürlich eine dreigliedrige Rekursionsformel für die $Q_0(\lambda, n)$ oder ${}_dP_0(n)$. Für

$${}_0P_0(n) = E_0(n) \text{ und } {}_1P_0(n) = S_0(n)$$

gelten aber die *zwei*gliedrigen Rekursionsformeln (V) bzw. (VII).

Die Verallgemeinerung für ${}_dP_0(n)$ mit $d \geq 0$ lautet:

$$(\mathrm{V}_d) \qquad \underline{\varphi_d(n)\,{}_dP_0(n) = (n-d)\varphi_d(n+1)\,{}_dP_0(n-1) + (-1)^{n-d}d!}$$

Dabei sind die $\varphi_d(n)$ normierte Polynome in $n$ vom Grade $d$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Sie können rekursiv definiert werden durch

$$(\varphi_1) \qquad \varphi_0(n) = 1, \qquad \varphi_d(n) = (n-d)\varphi_{d-1}(n) + \varphi_{d-1}(n-1).$$

Genau analog der Rechnung bei $q_\lambda(n)$ folgt

$$(\varphi_2) \qquad \varphi_d(n) = \varphi_d(n-1) + d\varphi_{d-1}(n-1).$$

**Beweis** (durch Induktion nach $d$). Es ist nach Induktionsvoraussetzung, $(\varphi_1)$ und $(\varphi_2)$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{d+1}(n)\,{}_{d+1}P_0(n) - (n-d-1)\varphi_{d+1}(n+1)\,{}_{d+1}P_0(n-1) + (-1)^{n-d}(d+1)! \\
&\quad = \varphi_{d+1}(n)[{}_dP_0(n) + {}_dP_0(n-1)] - (n-d-1)\varphi_{d+1}(n+1)[{}_dP_0(n-1) + {}_dP_0(n-2)] \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n-d}(d+1)! \\
&\quad = \frac{(-1)^{n-d}d!}{\varphi_d(n)}[\varphi_{d+1}(n) - \varphi_{d+1}(n+1) + (d+1)\varphi_d(n)] = 0.
\end{aligned}$$

Aus $(\varphi_2)$ ergeben sich viele ähnliche Beziehungen, z. B.

$$(n-d)\varphi_d(n+1) = \varphi_{d+1}(n) + d\varphi_d(n),$$

$$(n+1)\varphi_d(n) = \varphi_{d+1}(n+1) + d\varphi_{d-1}(n-1).$$

$$(n-d+1)\varphi_d(n+2) = n\varphi_d(n+1) + \varphi_d(n),$$

$$\varphi_{d+1}(n+1) = n\cdot\varphi_d(n) + \varphi_d(n-1).$$

Die ersten $\varphi_d(n)$ sind:

| $d$ | $\varphi_d(n)$ | $d$ | $\varphi_d(n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | 3 | $n^3-3n^2-n+4$ |
| 2 | $n^2-n-1$ | 4 | $n^4-6n^3+5n^2+16n-15.$ |

Wegen $\varphi_0(n)=1$ und $n \geq d$ folgt

$$\varphi_d(n) > 0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots; d>0).$$

Aus $(\mathrm{V_d})$ folgt wegen ${}_{d+1}P_0(n) = {}_dP_0(n) + {}_dP_0(n-1)$ durch Eliminieren von ${}_dP_0(n)$ bzw. ${}_dP_0(n-1)$:

$$(\mathrm{VII_d}) \qquad \varphi_d(n)\,{}_{d+1}P_0(n) = \varphi_{d+1}(n+1)\cdot{}_dP_0(n-1) + (-1)^{n-d}d!$$

$$(\mathrm{VII'_d}) \qquad \varphi_{d+1}(n+1)\,{}_dP_0(n) = (n-d)\varphi_d(n+1)\,{}_{d+1}P_0(n) + (-1)^{n-d}d!$$

und durch einfache Rechnung

$$(\mathrm{II_d}) \qquad \varphi_{d+1}(n)\,{}_dP_0(n) = (n-d)(n-d-1)\varphi_d(n+1)\,{}_{d+1}P_0(n-1) - (-1)^{n-d}d\cdot d!$$

Aus diesen zweigliedrigen Rekursionen erhält man wieder die dreigliedrigen, in denen die $\varphi_d(n)$ nicht mehr auftreten, z. B.

$${}_dP_0(n) = (n-1)\,{}_dP_0(n-1) + (n-d-1)\,{}_dP_0(n-2) \qquad \text{für } d \geq 0,$$

$${}_dP_0(n) = (n+1)\,{}_{d-1}P_0(n-1) - (d-1)\,{}_{d-2}P_0(n-2) \qquad \text{für } d > 1.$$

Die letzte Formel ergibt für $d=1$, sobald ${}_{-1}P_0(n)$ irgendwie als endliche Zahl definiert ist, die *falsche* Gleichung $S_0(n) = (n+1)E_0(n-1)$, während (VII) *richtig* lautet:

$$S_0(n) = (n+1)E_0(n-1) + (-1)^n.$$

Es ist also unmöglich, endliche Größen ${}_{-1}P_0(n)$ so zu definieren, daß alle allgemeinen Rekursionsformeln der ${}_dP_0(n)$ auch für $d=-1$ gelten. Doch kann man ${}_{-1}P_0(n)$ so definieren (§ 11), daß für sie alle hier erwähnten dreigliedrigen Rekursionen bis auf analoge Korrekturglieder $(-1)^n$ gelten, z. B. (XX) an Stelle der ersten (für festes $d$).

Zur bequemeren Übersicht seien die folgenden Tabellen für $\varphi_d(n)$ und $q_\lambda(n)$ angegeben:

$\varphi_d(n)$

| $n$ \ $d$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 5 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 11 | 61 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 19 | 49 | 65 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 6 | 29 | 106 | 261 | 326 | 1 | | |
| 7 | 1 | 7 | 41 | 193 | 685 | 1631 | 1957 | 1 | |
| 8 | 1 | 8 | 55 | 316 | 1457 | 5056 | 11743 | 13700 | 1 |

$q_\lambda(n)$

| $n$ \ $\lambda$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | −1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 7 | 11 | 9 | −1 | | | | |
| 5 | 1 | 4 | 13 | 32 | 53 | 44 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 5 | 21 | 71 | 181 | 309 | 265 | −1 | | |
| 7 | 1 | 6 | 31 | 134 | 465 | 1214 | 2119 | 1854 | 1 | |
| 8 | 1 | 7 | 43 | 227 | 1001 | 3539 | 9403 | 16687 | 14833 | −1 |

Mit $n=d+\lambda$ hat man wegen ($V_d$), ($VII_d$), ($VII'_d$) und ($II_d$):

($V_q$) $$\varphi_d(n)q_\lambda(n)=\lambda\varphi_d(n+1)q_{\lambda-1}(n-1)+(-1)^\lambda \quad \text{für } d\geqq 0,$$

($VII_q$) $$d\varphi_{d-1}(n)q_\lambda(n)=\varphi_d(n+1)q_\lambda(n-1)-(-1)^\lambda \quad \text{für } d>0,$$

($VII'_q$) $$\varphi_{d+1}(n+1)q_\lambda(n)=\lambda(d+1)\varphi_d(n+1)q_{\lambda-1}(n)+(-1)^\lambda \quad \text{für } d\geqq 0,$$

($II_q$) $$\varphi_{d+1}(n)q_\lambda(n)=\lambda(\lambda-1)(d+1)\varphi_d(n+1)q_{\lambda-2}(n-1)-(-1)^\lambda d \quad \text{für } d\geqq 0.$$

## 11. Totalsequenzen

Die Anzahl der Totalsequenzen in $P(n+1)$ ist invariant gegenüber zyklischen Vertauschungen der Elemente; also ist

$$T_k(n+1)\equiv 0 \pmod{n+1}.$$

Es werde deswegen

(XVI) $$T_k(n+1)=(n+1)_P_k(n) \qquad (n=1,2,\ldots;\ k=0,1,\ldots,n+1)$$

gesetzt[16]). Wählt man als Repräsentanten der durch zyklische Vertauschung der Elemente entstehenden $T_k(n+1)$ die $P(n+1)$ mit $p_{n+1}=n+1$ und läßt dann das letzte Element weg, so sind in der entstandenen $P(n)$ die $k$ Totalsequenzen eineindeutig dargestellt durch $k$ der $n+1$ Möglichkeiten:

| | |
|---|---|
| 1: | die Eigenstelle 1 |
| $2, 3, \ldots, n$: | die $n-1$ Sequenzen $1,2;2,3;\ldots;n-1,n$ |
| $n+1$: | die Eigenstelle $n$. |

Damit das auch für $n=1$ gilt, soll hier 1 zweimal als Bild einer Totalsequenz gelten.

[16]) Nicht $=_P_k(n+1)$, damit $\sum_{k=0}^{n+1}_P_k(n)=n!$ ausfällt in Analogie zu $\sum_{k=0}^{n-d}{}_dP_k(n)=n!$

Es ist ein naheliegender Versuch, diese $n+1$ Möglichkeiten als $-1$-Progressionen ${}_{-}p_i$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ zu definieren. Damit das einen Sinn hat, ist nachzuweisen, daß diese $-1$-Progressionen aufeinander abgebildet werden können, daß es also für jede Permutation

$$\begin{pmatrix} {}_{-}p_1 & {}_{-}p_2 & \cdots & {}_{-}p_{n+1} \\ {}_{-}\overline{p}_1 & {}_{-}\overline{p}_2 & \cdots & {}_{-}\overline{p}_{n+1} \end{pmatrix}$$

eine Abbildung aller $P(n)$ auf sich gibt, bei der

1. die Anzahl der $-1$-Progressionen erhalten bleibt,
2. ${}_{-}p_i$ in $P(n)$ übergeht in ${}_{-}\overline{p}_i$ in $\overline{P}(n)$.

Das ist in der Tat möglich. Man braucht dazu nur als *Totalreduktion* in den obigen Fällen $2, 3, \ldots, n$ die Reduktion im $S$-Sinn, im Falle 1 das Weglassen der Eigenstelle 1 und Verringern der übrigen Elemente um 1, im Falle $n+1$ das Weglassen der Eigenstelle $n$ einzuführen und als *Totaldilatation* die zur Totalreduktion reziproke Operation. Dann läßt sich jede ${}_{-1}P_k(n)$ (d. h. jede Permutation von $n$ Elementen mit $k$ solcher $-1$-Progressionen) für $k=0, 1, 2, \ldots, n$ durch $k$ Totalreduktionen in eine ${}_{-1}P_0(n-k)$ reduzieren und diese *Totalstammpermutation* durch die $k$ Bild-$(-1)$-Progressionen zu ${}_{-1}\overline{P}_k(n)$ dilatieren. Setzt man fest, daß diese Operationen im Falle Dilatation in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n+1$, im Falle Reduktion umgekehrt ausgeführt werden, so bleibt jede vorhandene $-1$-Progression bei den folgenden Dilatationen bzw. Reduktionen erhalten (letzteres sofern sie nicht gerade selbst beseitigt werden soll), womit die Abbildung gegeben ist.

Nur für $k=n+1$, d. h. für die ${}_{-1}P_{n+1}(n)=12\ldots n$ muß noch festgesetzt werden, daß ihre Totalstammpermutation eine (eigens zu diesem Zweck gesetzte) ${}_{-1}P_0(-1)$ ist. Definiert man also die Anzahlen

$${}_{-1}P_{n+1}(n)=1 \text{ auch für } n=0, -1\,^{17}),$$
$${}_{-1}P_0(0)=0,$$

so hat man analog zu (XVa)

$$\text{(XVII)} \qquad {}_{-}P_k(n)={}_{-1}P_k(n)=\binom{n+1}{k}{}_{-1}P_0(n-k),$$

und (XVI) gilt auch für $n=0$, wenn dem einzigen Element 1 als Permutation genau *eine* Totalsequenz zugeschrieben wird, was formal aus der Definition (4) folgt (wenn man will, auch noch für $n=-1$ mit $T_0(0)=0$).

Analog zu (XIII) werde gesetzt

$$Q_k(n+1, n)={}_{-1}P_k(n) \qquad (n=-1, 0, 1, \ldots; k=0, 1, \ldots, n+1).$$

Dann gilt (IX) auch für $\lambda=n+1$ wegen (XVII). Nun ist (X) für $\lambda=n$ zu beweisen, also

$$\text{(XVIII)} \qquad E_0(n)={}_{-1}P_0(n)+{}_{-1}P_0(n-1).$$

Das ist richtig, weil $E_0(n)=(b+c)_n$ ist, d. h. $E_0(n)$ alle $S_0(n)$ mit $p_1 \neq 1$ enthält. Diese haben entweder $p_n \neq n$, und sind dann eine ${}_{-1}P_0(n)$, oder $p_n=n$, dann gehen sie durch Streichen des letzten Elements in die ${}_{-1}P_0(n-1)$ über.

Auch für $n=1$ und $n=0$ bleibt die Formel richtig.

---

[17]) Das gibt ${}_{-1}P_0(-1)=1$, während sonst ${}_{d}P_0(d)=d!$ ist. Trotzdem erweist sich diese Zusatzdefinition hier als zweckmäßig.

Formel (XI) gilt wegen (XVIII) etwas allgemeiner auch für $\lambda=0,1,\ldots,n+1$; $\mu=0,1,\ldots,n+1-\lambda$. Aber (XIa) erfährt keine Erweiterung, weil sonst $\mu<0$ wäre. Aus (XI) und (XIII) ergibt sich (XIb) für $\mu=d+1$, also analog zu (XIc) und (XId):

$$\text{(XVIIIa)} \qquad {}_dP_0(n)=\sum_{\nu=0}^{d+1}\binom{d+1}{\nu}{}_{-1}P_0(n-\nu).$$

Formel (XII) gilt wegen (X) auch für $\lambda=n+1$ (Beweis wie früher), ebenso (XIIa); nur hat man an Stelle von $Q_0(0,-1)$ natürlich 1 zu schreiben, nicht $(-1)!$. Auch (XIIb) und (XIIc) gelten, weil diese aus (XIII) und (XII) folgen, für $d=-1$.

Speziell hat man also

$$\text{(XIX)} \qquad {}_{-1}P_0(n)=\sum_{\nu=0}^{n+1}(-1)^\nu\binom{n+1}{\nu}(n-\nu)! \qquad \text{(für } (-1)! \text{ ist 1 zu schreiben).}$$

Für die Berechnung der ${}_{-1}P_0(n)$ ist es aber viel bequemer, aus (V) und (XVIII) die Rekursionsformel

$$\text{(XX)} \qquad {}_{-1}P_0(n)=(n-1){}_{-1}P_0(n-1)+n{}_{-1}P_0(n-2)+(-1)^n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

abzuleiten. Man erhält hieraus:

| $n$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ${}_{-1}P_0(n)$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 8 | 36 | 229 | 1625 | ... |

Für die $T_k(n)$ folgt aus (XIX), (XVI) und (XVII)

$$T_0(n)=n\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}(n-\nu-1)! \qquad \text{(1 an Stelle von } (-1)!)$$

und

$$(n-k)\,T_k(n)=n\binom{n}{k}T_0(n-k).$$

Danach hat man für die $T_k(n)$ die Tabelle

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | | | | | | |
| 2 | 0 | 0 | 2 | | | | | |
| 3 | 3 | 0 | 0 | 3 | | | | |
| 4 | 4 | 16 | 0 | 0 | 4 | | | |
| 5 | 40 | 25 | 50 | 0 | 0 | 5 | | |
| 6 | 216 | 288 | 90 | 120 | 0 | 0 | 6 | |
| 7 | 1603 | 1764 | 1176 | 245 | 245 | 0 | 0 | 7 |

Auch die Formeln (XIV) und (XV) aus § 9 gelten für $d=-1$, und zwar

(XIV), weil sich jede ${}_{-1}P_0(n-k)$ auf $\binom{h}{k}$ Arten zu einer ${}_{-1}P_{kh}(n)$ totaldilatieren läßt,

(XV), weil $h$ der $-1$-Progressionen für $h\leq n$ auf $h$ bestimmte Eigenstellen abgebildet werden können, und für $h=n+1$ wegen (XVII). Man kann also die Dreiecks-Tabelle in § 9 nach rechts oben durch die im Anschluß an (XX) angegebene Reihe für $d=-1$ ergänzen.

Eingegangen 30. März 1948.

## Zusatz bei der Korrektur.

Während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit ist die Dissertation von H. Burger [18]) erschienen, in der zum Teil ähnliche Fragen behandelt werden. Die gemeinsamen Ergebnisse stimmen überein. Burger untersucht Variationen aus $n$ zu $k$ Elementen mit $\varkappa$ Eigenstellen bzw. $\varkappa$ Sequenzen, deren Anzahlen mit $A^{\varkappa}_{nk}$ bzw. $B^{\varkappa}_{nk}$ bezeichnet wird.

Ist eine $A^{\varkappa}_{nk}$ gegeben, so kann man die $n-k$ übrigen Elemente beliebig permutieren und hat dann die $Q_{\varkappa}(k,n)$, die von den $k$ Elementen $\varkappa$ Eigenstellen haben; also ist

$$(n-k)!\,A^{\varkappa}_{nk}=Q_{\varkappa}(k,n).$$

Dies ergibt nach (IX) bei Burger

$$A^{\varkappa}_{nk}=\binom{k}{\varkappa}A^{0}_{n-\varkappa;\,k-\varkappa}, \qquad 3.8.$$

also

$$A^{\varkappa}_{nk}=\binom{k}{\varkappa}q^{(n-\varkappa)}_{k-\varkappa}.$$

Für $\varkappa=0$ folgt aus der (sehr speziellen) Formel (XIIa):

$$A^{0}_{nk}=k!\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!}\binom{n-\lambda}{n-k} \qquad 3.6$$

und aus diesen beiden

$$A^{\varkappa}_{nk}=\binom{k}{\varkappa}(k-\varkappa)!\sum_{\lambda=0}^{k-\varkappa}\binom{n-\varkappa-\lambda}{n-k}\cdot\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!}. \qquad 3.5$$

Die Anzahlen $B^{\varkappa}_{nk}$ ergeben sich so: In den $B^{\varkappa}_{nk}$ stehen die $\varkappa$ Sequenzen, wenn man alle übrigen $n-k$ Elemente beliebig permutiert, in der $P(n)$ an $\varkappa$ der Stellen $2, 3, \ldots, k$. Bildet man die Inversen $P^{-1}(n)$, so erhält man Permutationen mit $\varkappa$ der Sequenzen $12, 23, \ldots, k-1\,k$. Deren gibt es $Q_{\varkappa}(k-1,n)$, also ist

$$(n-k)!\,B^{\varkappa}_{nk}=Q_{\varkappa}(k-1,n)$$

und wegen

$$(n-\varkappa+1)!\,A^{\varkappa}_{n,\,k-1}=Q_{\varkappa}(k-1,n)$$

folgt

$$B^{\varkappa}_{nk}=(n-k+1)A^{\varkappa}_{n,\,k-1}. \qquad 4.19$$

Diese Formel erhält Burger umgekehrt als Ergebnis aus der Gleichheit der zugehörigen expliziten Ausdrücke.

---

[18]) *H. Burger*, Ausgewählte kombinatorische Probleme in analytischer Behandlung, Bern 1948.

---

Eingegangen 15. April 1948.

# On construction and characterization of Galois algebras with given Galois groups.

By *Tadasi Nakayama*, Nagoya (Japan).

In a recent paper[1]) Hasse has developed an interesting theory of construction and characterization of Galois algebras with given Galois groups, which specializes in the case of abelian Galois groups to the well-known theory of Kummer fields; an algebra $\mathfrak{A}$ over a field $\Omega$ is called a Galois algebra with Galois group $G$ when $\mathfrak{A}$ possesses $G$, a finite group, as a group of automorphisms and $\mathfrak{A}$ is $(G, \Omega)$-operator-isomorphic to the group ring $G(\Omega)$ of $G$ over $\Omega$[2]). Hasse's ingenious device is, on assuming that the characteristic of $\Omega$ does not divide the order of $G$ and that the absolutely irreducible representations of $G$ lie in $\Omega$, to construct a certain $\Omega$-basis of $\mathfrak{A}$, called factor basis, in accord with the decomposition of the group ring $G(\Omega)$ into simple components, and to characterize $\mathfrak{A}$ by a certain matric factor system which defines the multiplication between the constituents of the factor basis belonging to the single simple components of $G(\Omega)$. Now we want, in the present work[3]), to offer a similar theory freed from the restriction on the characteristic. We shall indeed obtain a theory which, though complicated, generalizes Hasse's theory and comprises the case of a non-semisimple modular group ring $G(\Omega)$. Our main tool will be the theory of modular regular representations of Brauer's school, in particular the theorem of Brauer-Nesbitt-Osima on the Kronecker product of regular representations[4]) and the orthogonality relations of Nesbitt-Nakayama[5]). The work is moreover in a trend similar to that of the writer's former work which freed Deuring's theory on Galois moduli from the same restriction on the characteristic, by making use of the theory of Frobenius algebras[6]).

---

[1]) [3]. The writer is grateful to Professor *Hasse* for his communication.

[2]) *Hasse* demands further that $\mathfrak{A}$ be associative, commutative and, moreover, (absolutely) semisimple.

[3]) A short account of the present work has appeared in Nagoya Math. Journal 1 (1950). I want to express my thanks to Prof. *Hasse* for his kind invitation to publish the present full account here.

[4]) Conjectured by *Brauer-Nesbitt* [2] and proved in a generalized form by *Osima* [9].

[5]) For the orthogonality, established first in the case of the group ring by *Nesbitt*, in cooperation with *Brauer*, and then extended to Frobenius algebras by *Nakayama*, see [1], [8].

[6]) [6], II. §§ 2, 3.

## § 1. Decomposition of an associative algebra[7]).

Let $\mathfrak{G}$ be an associative algebra with unit element 1 over a field $\Omega$. Let

$$(1) \qquad 1 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{i=1}^{f(\varkappa)} e_i^{(\varkappa)}$$

be a decomposition of 1 into a sum of mutually orthogonal primitive idempotents $e_i^{(\varkappa)}$, where the left-ideals $\mathfrak{G}e_1^{(\varkappa)}, \mathfrak{G}e_2^{(\varkappa)}, \ldots, \mathfrak{G}e_{f(\varkappa)}^{(\varkappa)}$ are isomorphic (or, equivalently, the right-ideals $e_1^{(\varkappa)}\mathfrak{G}, e_2^{(\varkappa)}\mathfrak{G}, \ldots, e_{f(\varkappa)}^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$ are isomorphic) for each fixed $\varkappa$ and, $\mathfrak{G}e_i^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{G}e_j^{(\lambda)}$ with $\varkappa \neq \lambda$ are not. For each $\varkappa$ there is a system of matrix units $c_{ii}^{(\varkappa)} = e_i^{(\varkappa)}$, $c_{ij}^{(\varkappa)} c_{lm}^{(\varkappa)} = \delta_{jl} c_{im}^{(\varkappa)}$. For the sake of simplicity we denote $e_1^{(\varkappa)}$ by $e^{(\varkappa)}$. Let $\left(e^{(\varkappa)}, t_2^{(\varkappa)}, \ldots, t_{v(\varkappa)}^{(\varkappa)}\right)$ be an (independent) $\Omega$-basis of the right-ideal $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$. We write it in a column and denote it by $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$:

$$(2) \qquad \mathfrak{v}^{(\varkappa)} = \begin{pmatrix} e^{(\varkappa)} \\ t_2^{(\varkappa)} \\ \vdots \\ t_{v(\varkappa)}^{(\varkappa)} \end{pmatrix}.$$

Put

$$(3) \qquad \mathfrak{B}^{(\varkappa)} = \left(\mathfrak{v}^{(\varkappa)}, c_{21}^{(\varkappa)}\mathfrak{v}^{(\varkappa)}, \ldots, c_{f(\varkappa)1}^{(\varkappa)}\mathfrak{v}^{(\varkappa)}\right).$$

Each column $c_{i1}^{(\varkappa)}\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$ is a basis of $c_{i1}^{(\varkappa)} e^{(\varkappa)}\mathfrak{G} = e_i^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$.

For $z \in \mathfrak{G}$ we have

$$(4) \qquad \mathfrak{v}^{(\varkappa)} z = V^{(\varkappa)}(z)\,\mathfrak{v}^{(\varkappa)} \qquad \left(\text{and } \mathfrak{B}^{(\varkappa)} z = V^{(\varkappa)}(z)\,\mathfrak{B}^{(\varkappa)}\right)$$

with a representation $V^{(\varkappa)}$ of $\mathfrak{G}$ in $\Omega$. $V^{(\varkappa)}$ is a directly indecomposable component of the right regular representation of $\mathfrak{G}$.

On taking a certain $\varkappa$ we now simplify our notation by writing $e, c_{ij}, f, v, \mathfrak{v}, \mathfrak{B}, V$ for $e^{(\varkappa)}, c^{(\varkappa)}, f(\varkappa), v(\varkappa), \mathfrak{v}^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ and $V^{(\varkappa)}$; thus, for instance, $\mathfrak{v}z = V(z)\,\mathfrak{v}$. Let

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}$$

be a column, with length $v$, of elements in $\mathfrak{G}$, not necessarily linearly independent, satisfying

$$(5) \qquad \mathfrak{x}z = V(z)\,\mathfrak{x} \qquad (z \in \mathfrak{G}).$$

Then there exists an element $x$ in $\mathfrak{G}$, even in $\mathfrak{G}e$, such that

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = x\mathfrak{v}.$$

Let now

$$(7) \qquad (e, s_2, \ldots, s_u)$$

be an $\Omega$-basis of the left-ideal $\mathfrak{G}e$, and let

$$(8) \qquad z(e, s_2, \ldots, s_u) = (e, s_2, \ldots, s_u)\,U(z);$$

$U = U^{(\varkappa)}$ being a directly indecomposable component of the left regular representation of $\mathfrak{G}$. We introduce a $(v, u)$-matrix

$$(9) \qquad \mathfrak{T}_e = (\mathfrak{v}, s_2\mathfrak{v}, \ldots, s_u\mathfrak{v})$$

in $\mathfrak{G}$. Its $uv$ elements, not independent in general, span over $\Omega$ the two-sided ideal $\mathfrak{G}e\mathfrak{G}$. Besides

$$(10) \qquad \mathfrak{T}_e z = V(z)\,\mathfrak{T}_e$$

---

[7]) For this paragraph cf. e. g. [5].

we have

$$z\mathfrak{T}_e = \mathfrak{T}_e U(z). \tag{11}$$

Thus $\mathfrak{x}$ in (6) is $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}_e\big(U(x)\big)_1$, where $(U(x))_1$ denotes the first column of $U(x)$. So, if $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_h)$ is a $(v, h)$-matrix in $\mathfrak{G}$ satisfying

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_h)z = V(z)\,(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_h), \tag{12}$$

$h$ being an arbitrary natural number, we have

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_h) = \mathfrak{T}_e X \tag{13}$$

with a $(u, h)$-matrix $X$ in $\Omega$. (It is of interest to observe that if here $h \leq f$ then there exists an element $x$ in $\mathfrak{G}$ such that

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_h) = x(\mathfrak{v}, c_{21}\mathfrak{v}, \dots, c_{h1}\mathfrak{v}) = x(\mathfrak{T}_e)_{12\dots h},$$

and so we may put $X = \big(U(X)\big)_{12\dots h}$, where $(\mathfrak{T}_e)_{12\dots h}$, $\big(U(x)\big)_{12\dots h}$ denote matrices composed of the first $h$ columns of $\mathfrak{T}_e$, $U(x)$; for we have $\mathfrak{x}_i = x_i\mathfrak{v}$ $(i = 1, 2, \dots, h)$, and we have only to put $x = \sum_{i=1}^{h} x_i c_{1i}$).

## § 2. Ground field allowing absolutely irreducible representations.

Now we assume that all the absolutely irreducible representations of $\mathfrak{G}$ lie in $\Omega$, that is, the $e^{(\lambda)}\mathfrak{G}e^{(\lambda)}/e^{(\lambda)}\mathfrak{N}e^{(\lambda)}$ are all of rank 1 over $\Omega$, where $\mathfrak{N}$ denotes the radical of $\mathfrak{G}$. Let

$$\mathfrak{G}e = \mathfrak{l}_0 \supset \mathfrak{l}_1 \supset \cdots \supset 0 \tag{14}$$

be a composition series of the left-ideal $\mathfrak{G}e$. Let the $q$-th composition-modulus $\mathfrak{l}_{q-1}/\mathfrak{l}_q$ be isomorphic to $\mathfrak{G}e^{(\varkappa_q)}/\mathfrak{N}e^{(\varkappa_q)}$; we have $e^{(\varkappa_1)} = e$. Take a generator $r_q$ of each $\mathfrak{l}_{q-1}/\mathfrak{l}_q$; $r_q$ may be taken from $e^{(\varkappa_q)}\mathfrak{G}e$, and we really employ $e$ for $r_1$. Then, according to our assumption on $\Omega$, $\big(e^{(\varkappa_q)}, c_{21}^{(\varkappa_q)}, \dots, c_{f(\varkappa_q)1}^{(\varkappa_q)}\big)r_q$ forms an $\Omega$-basis of $\mathfrak{l}_{q-1}/\mathfrak{l}_q$. So

$$\big((e, c_{21}, \dots, c_{f1}),\ (e^{(\varkappa_2)}, c_{21}^{(\varkappa_2)}, \dots, c_{f(\varkappa_2)1}^{(\varkappa_2)})\, r_2, \dots\big) \tag{15}$$

is one of $\mathfrak{G}e$.

On taking this basis (15) of $\mathfrak{G}e$ for (4), construct the matrix $\mathfrak{T}_e$ in (9), which we now denote by $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$; $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$ is thus the transpose of the Kronecker product, so to say, of the transposes of (15) and $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$. Since each column $e^{(\varkappa_q)}r_q\mathfrak{v}$ lies in $e^{(\varkappa_q)}\mathfrak{G}$, we have

$$\mathfrak{T}^{(\varkappa)} = S^{(\varkappa)}\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(\varkappa)} & & \\ & \mathfrak{B}^{(\varkappa_2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{16}$$

with a $\big(v, \sum_q v(\varkappa_q)\big)$-matrix $S^{(\varkappa)}$ in $\Omega$. Here we have, combinatorically,

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(\varkappa)} & & \\ & \mathfrak{B}^{(\varkappa_2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = K^{(\varkappa)*}\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{B}^{(k)} \end{pmatrix} K^{(\varkappa)} \tag{17}$$

with a $\big(\sum_\lambda f(\lambda), \sum_q f(\varkappa_q)\big)$-matrix $K^{(\varkappa)}$, which has one 1 in each column, and a $\big(\sum_q v(\varkappa_q), \sum_\lambda v(\lambda)\big)$-matrix $K^{(\varkappa)*}$, which has one 1 in each row. Thus

$$\mathfrak{T}^{(\varkappa)} = S^{(\varkappa)}K^{(\varkappa)*}\begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{B}^{(k)} \end{pmatrix} K^{(\varkappa)}. \tag{18}$$

## § 3. Group ring case.

Let $G$ be a finite group, and consider the case of the group ring $\mathfrak{G}=G(\Omega)$. Then $\mathfrak{G}$ is weakly symmetric[8]) (in fact, symmetric), that is, the last composition-modulus of $\mathfrak{l}_0=\mathfrak{G}e$ is unique and is isomorphic to $\mathfrak{G}e/\mathfrak{N}e$, and $u=v(=v(\varkappa))$.

Now, the Kronecker product of two components, say $V^{(\varkappa)}$, $V^{(\lambda)}$, of the regular representation of $\mathfrak{G}$ is again directly decomposable into a certain number of components $V^{(\mu)}$. We have indeed more generally:

*If $H$ is a subgroup of $G$ and $\overline{R}(z)$ is the representation of $G$ induced by the 1-representation of $H$, then for any representation $Z(z)$ of $G$ the representation of $G$ induced by the restriction $Z_H$ of $Z(z)$ to $H$ is equivalent to the Kronecker product $\overline{R}(z)\times Z(z)$.*

We give here a modular-theoretical proof, which is perhaps a bit simpler than Osima's original one[9]). Let namely

$$G=z_1H+z_2H+\cdots+z_rH,$$

and denote by $\mathfrak{j}=j\Omega$ the (left) representation-modulus of $H$ belonging to the 1-representation. The representation-modulus of $G$ belonging to the induced representation $\overline{R}$ is given by $\overline{\mathfrak{j}}=z_1\mathfrak{j}\oplus z_2\mathfrak{j}\oplus\cdots\oplus z_r\mathfrak{j}$. Here, if $zz_s=z_ty\ (y\in H)$, then $z\cdot z_sj=z_tyj=z_tj$. Hence the representation-modulus belonging to the Kronecker product $\overline{R}\times Z$ is

$$\overline{\mathfrak{j}}\times\mathfrak{m}=z_1j\mathfrak{m}\oplus z_2j\mathfrak{m}\oplus\cdots\oplus z_rj\mathfrak{m} \tag{19}$$

with a representation-modulus $\mathfrak{m}$ of $Z$; of course

$$z\cdot z_sju=(z\cdot z_sj)\ (z\cdot u)=(z_tj)\ (zu)$$

for $u\in\mathfrak{m}$. Denote on the other hand $\mathfrak{m}$ by $\mathfrak{m}'$ when considered as $H$-modulus. Let an element $u$ of $\mathfrak{m}$ be denoted similarly by $u'$ when considered as element of $\mathfrak{m}'$. Then our representation of $G$ induced by $Z_H$ belongs to the representation-modulus

$$z_1\mathfrak{m}'\oplus z_2\mathfrak{m}'\oplus\cdots\oplus z_r\mathfrak{m}', \tag{20}$$

where $z\cdot z_su'=z_tyu'$. Now we assert that the correspondence

$$(z_sj)\ (z_su)\leftrightarrow z_su'$$

gives an (operator-)isomorphism of the representation-moduli (19) and (20). Indeed $z\cdot(z_sj)\ (z_su)=(z\cdot z_sj)\ (z\cdot z_su)=(z_tj)\ (z_tyu)$ and this corresponds to $z_tyu'=z\cdot z_su'$, which proves the assertion and thus completes our proof.

So

$$V^{(k)}\times V^{(\lambda)}=P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & V^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}P_{\varkappa,\lambda} \tag{21}$$

with a non-singular matrix $P_{\varkappa,\lambda}$ in $\Omega$ of degree $v(\varkappa)\,v(\lambda)$. Here

$$\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & V^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}=G'_{\varkappa,\lambda}\begin{pmatrix} V^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & V^{(k)} \end{pmatrix}G_{\varkappa,\lambda},\quad \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \mathfrak{T}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}=G'_{\varkappa,\lambda}\begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{T}^{(k)} \end{pmatrix}G_{\varkappa,\lambda} \tag{22}$$

---

[8]) See e.g. [7].

[9]) [9].

with a (combinatoric) $\left(\sum_{\mu} v(\mu),\ v(\varkappa)\, v(\lambda)\right)$-matrix $G_{\varkappa,\lambda}$ which possesses one 1 in each column. We have for instance

$$(23)\qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \mathfrak{T}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{B}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda},$$

$I_k$ being the unit matrix of degree $k$. Operating $z$ on both sides and applying again our equation to the left side, we obtain

$$(24)\qquad \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(z) & & \\ & V^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))}(z) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{B}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda}$$

$$= G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \left( \begin{pmatrix} V^{(1)}(z) & & \\ & \ddots & \\ & & V^{(k)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{B}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda}.$$

Further

$$(25)\qquad V^{(\lambda)} \times V^{(\varkappa)} = J_{\varkappa,\lambda}^{-1} (V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})\, J_{\varkappa,\lambda}$$

with a (combinatorically defined) permutation matrix $J_{\varkappa,\lambda}$. We can choose $\omega_i$ so that

$$(26)\qquad \omega_i(\varkappa, \lambda) = \omega_i(\lambda, \varkappa);$$

in the following we assume that this is really the case for our choice. Then $G_{\varkappa,\lambda} = G_{\lambda,\varkappa}$. We shall, as we may, also assume

$$(27)\qquad P_{\lambda,\varkappa} = P_{\varkappa,\lambda} J_{\varkappa,\lambda}.$$

We shall further make use of the following *orthogonality relations* for the coefficients of the regular representation of $\mathfrak{G}$; though the relations can be formulated for Frobenius algebras in general, we restrict ourselves here to our group ring case. In this case we can choose[10]) our basis $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$ in (2) of $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$ in accord with a composition series[11]), so that $V^{(\varkappa)}$ takes the form

$$(28)\qquad V^{(\varkappa)} = \begin{pmatrix} F^{(\varkappa)} & M^{(\varkappa)} \\ & \ddots \\ & & F^{(\varkappa)} \end{pmatrix}$$

with irreducible $F^{(\varkappa)}$. Let $F^{(\varkappa)} = (\varphi_{ij}^{(\varkappa)})$, $M^{(\varkappa)} = (\mu_{ij}^{(\varkappa)})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, f(\varkappa))$. Then, on assuming again the absolute irreducibility of $F^{(\varkappa)}$, we have

$$(29)\qquad \sum_{z \in G} \varphi_{ij}^{(\varkappa)}(z^{-1})\, \mu_{hl}^{(\varkappa)}(z) = \gamma^{(\varkappa)} \delta_{il} \delta_{jh} \quad \left(\gamma^{(\varkappa)} (\in \Omega) \neq 0\right)$$

and

$$(30)\qquad \sum_{z \in G} \varphi_{ij}^{(\varkappa)}(z^{-1})\, \nu(z) = 0$$

for any coefficient $\nu(z)$ of $V^{(\varkappa)}$ not in $M^{(\varkappa)}$ as well as for any coefficient $\nu(z)$ in $V^{(\lambda)}$ with $\lambda \neq \varkappa$. Supposing that we arrange the $e^{(\varkappa)}$ so that $F^{(1)}$ is the 1-representation, we have

$$(31)\qquad \sum_{z \in G} V^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ (\gamma \neq 0), \quad \sum_{z \in G} V^{(\varkappa)}(z) = 0 \quad (\varkappa \neq 1).$$

---

[10]) The relation (in its particular case) as well as our specified form of the basis $\mathfrak{v}(\varkappa)$ shall be used only at the end of § 5 and in the rather auxiliary §§ 7, 8.

[11]) A little more than that, as a matter of fact; we take the first and the last irreducible constituents in exactly the same form.

As a matter of fact, we shall have to use merely this last particular case (31), which can readily be confirmed directly. For $\sum_{z\in G} z$ is a last basis element of $e^{(1)}\mathfrak{G}$; we put $\sum_G z = \gamma t^{(1)}_{v(1)}$. Hence $e^{(1)}\left(\sum_G z\right) = \sum_G z = \gamma t^{(1)}_{v(1)}$, while the $t^{(1)}_i\left(\sum_G z\right)\left(i=2, 3, \ldots, v(1)\right)$ and $t^{(\varkappa)}_j\left(\sum_G z\right)$ $(\varkappa \neq 1)$ all vanish, as is easily seen. And this proves (31).

## § 4. Galois algebra.

Let now $\mathfrak{A}$ be an algebra, not necessarily associative, over $\Omega$, which has $G$ as a group of automorphisms. We call $\mathfrak{A}$ a Galois algebra, with Galois group $G$, when the right $\mathfrak{G}\left(=G(\Omega)\right)$-module $\mathfrak{A}$ is isomorphic to $\mathfrak{G}$ itself (i. e., when $\mathfrak{A}$ possesses a normal basis). With such a Galois algebra $\mathfrak{A}$ and with an arbitrary, but fixed ($\mathfrak{G}$-)isomorphism of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{A}$, we denote the matrices in $\mathfrak{A}$ which correspond to the matrices $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$ in $\mathfrak{G}$ by $\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)}$, $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}$. We have

$$\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} z = V^{(\varkappa)}(z)\, \tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \tag{32}$$

for $z \in G$, or generally for $z \in \mathfrak{G}$. Hence, for the Kronecker product $\tilde{V}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}$ we have $(\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}) z = (V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})(z)\, (\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)})$. So

$$P_{\varkappa,\lambda}\left(\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}\right) z = \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(z) & & \\ & V^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))}(z) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda}\left(\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}\right) \tag{33}$$

with $P_{\varkappa,\lambda}$ as in (21). By virtue of our observation in § 1 we have then

$$P_{\varkappa,\lambda}\left(\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} = G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{T}^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} \tag{34}$$

with a matrix $A_{\varkappa,\lambda}$ of type $\left(v(\varkappa)\, v(\lambda),\, f(\varkappa)\, f(\lambda)\right)$ in $\Omega$. ($P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}$ whence) $A_{\varkappa,\lambda}$ is uniquely determined, since the first, say, row of each $\mathfrak{T}^{(\mu)}$ consists of linearly independent elements. We may also write

$$\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)} = P^{-1}_{\varkappa,\lambda} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}. \tag{35}$$

Taking $A_{\varkappa,\lambda}$ for each pair $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k$ we obtain a system $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ of matrices in $\Omega$. Each Galois algebra $\mathfrak{A}$, with Galois group $G$, gives rise to such a system $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$, or more precisely to a family of such systems as we shall discuss later.

We want to show that conversely (not only $\mathfrak{A}$ is characterized uniquely by $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ but) any system $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$, with each $A_{\varkappa,\lambda}$ being of type $\left(v(\varkappa)\, v(\lambda),\, f(\varkappa)\, f(\lambda)\right)$, determines a Galois algebra with Galois group $G$[12]. Introduce namely $\sum_{\varkappa} f(\varkappa)\, v(\varkappa) = g$ (order of $G$) elements and arrange them into $k$ matrices $\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)}$ of respective type $\left(v(\varkappa),\, f(\varkappa)\right)$. Define by virtue of (35) an $\Omega$-linear multiplication in the $\Omega$-modulus $\mathfrak{A}$ spanned by those elements, considered as being linearly independent. Put further (32), to define the operations

[12]) In (34) we used the notations we introduced on assuming that the absolutely irreducible representations of $G$ lie in $\Omega$, but here the assumption was not essential. A little more serious was this assumption for (35). In the present assertion the assumption is rather essential.

of $G$ on $\mathfrak{A}$. The $\mathfrak{G}$-right-module $\mathfrak{A}$ is isomorphic to $\mathfrak{G}$. For $z \in G$ further

$$(36)\quad \left(\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}\right) z = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(1)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} z$$

$$= P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \left( \begin{pmatrix} V^{(1)}(z) & & \\ & \ddots & \\ & & V^{(k)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}$$

$$= P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(z) & & \\ & V^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))}(z) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}$$

$$= \left(V^{(\varkappa)}(z) \times V^{(\lambda)}(z)\right) P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}$$

$$= \left(V^{(\varkappa)}(z) \times V^{(\lambda)}(z)\right) \left(\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}\right) = V^{(\varkappa)}(z)\, \tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)}(z)\, \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)} = \tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} z \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)} z,$$

the third equality being secured by (24) and the linear isomorphism of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{A}$, and the fourth by (21). Since this is the case for every pair $\varkappa, \lambda$, each $z$ induces (an endomorphism and in fact) automorphism of the algebra $\mathfrak{A}$. So $\mathfrak{A}$ is a Galois algebra over $\Omega$ with Galois group $\mathfrak{G}$.

A similar consideration can be made for $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)}$. For, since

$$(\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)}) z = \left(V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)}\right)(z)\, (\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)})$$

we have

$$(37)\quad \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & \\ & \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{T}}^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}$$

with a uniquely determined matrix $B_{\varkappa,\lambda}$ (of degree $v(\varkappa)\, v(\lambda)$). $A_{\varkappa,\lambda}$ is composed of certain $f(\varkappa)\, f(\lambda)$ columns, in fact the 1st, 2nd, ..., $f(\lambda)$-th, $v(\lambda)+1$st, ..., $v(\lambda)+f(\lambda)$-th, ..., $(f(\varkappa)-1)\, v(\lambda)+f(\lambda)$-th columns, of $B_{\varkappa,\lambda}$. The system $\{B_{\varkappa,\lambda}\}$ characterizes $\mathfrak{A}$ (but it can not be taken arbitrarily, contrary to $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$). Conversely, not only is the system $\{B_{\varkappa,\lambda}\}$ determined uniquely by the system $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$, which is evident, but each element of $B_{\varkappa,\lambda}$ depends linearly on those of $A_{\mu,\nu}$. We have indeed

$$\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)} = S^{(\varkappa)} K^{(\varkappa)*} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} K^{(\varkappa)} \times S^{(\lambda)} K^{(\lambda)*} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} K^{(\lambda)}$$

$$(38)\quad = (S^{(\varkappa)} \times S^{(\lambda)})\, (K^{(\varkappa)*} \times K^{(\lambda)*}) \left( \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) (K^{(\varkappa)} \times K^{(\lambda)})$$

$$= (S^{(\varkappa)} \times S^{(\lambda)})\, (K^{(\varkappa)*} \times K^{(\lambda)*}) \left( P_{11}^{-1} G'_{11} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{T}}^{(k)} \end{pmatrix} G_{11} P_{11} A_{11} \right) (K^{(\varkappa)} \times K^{(\lambda)}).$$

Equating this with (37) and coming back to the group ring $\mathfrak{G}$ we obtain

(39)

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \mathfrak{T}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1}(S^{(\varkappa)} \times S^{(\lambda)})(K^{(\varkappa)*} \times K^{(\lambda)*}) \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} G_{11}' \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{T}^{(k)} \end{pmatrix} G_{11} P_{11} A_{11} \\ & \ddots \end{pmatrix} (K^{(\varkappa)} \times K^{(\lambda)}).$$

Now, take an $\Omega$-basis of $\mathfrak{G}$ which contains the first row of $\mathfrak{T}^{(\omega_i(\varkappa,\lambda))}$, say, and express by it each element of $\mathfrak{T}^{(\mu)}$ on the right hand side. Then we get equations which express, linearly, the elements of the rows of $P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}$ corresponding to $\mathfrak{T}^{(\omega_i(\varkappa,\lambda))}$ in terms of those in $A_{\mu,\nu}$. Hence also each element of $B_{\varkappa,\lambda}$ is expressed linearly by those of $A_{\mu,\nu}$. Since $P_{\varkappa,\lambda}$, $S^{(\varkappa)}$, $K^{(\varkappa)}$ and the expression of $\mathfrak{T}^{(\mu)}$ in terms of our basis, comprising the first row of $\mathfrak{T}^{(\omega_i(\varkappa,\lambda))}$, depend only on $G$ (and $\Omega$), the same is true for our expression of $\{B_{\varkappa,\lambda}\}$ by $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$. This expression, which we have not written down explicitely though, we denote by

$$B_{\varkappa,\lambda} = B_{\varkappa,\lambda}(\{A_{\varkappa,\lambda}\}). \tag{40}$$

Now, with our same $\mathfrak{A}$, let $^{-}$ be a second ($\mathfrak{G}$-)isomorphism of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$. It is related with our original one $\sim$ by

$$\bar{x} = \widetilde{a}\widetilde{x} \quad (x \in \mathfrak{G}) \tag{41}$$

where $a$ is a regular element in $\mathfrak{G}$. So in particular

$$\begin{aligned} &\bar{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} = \widetilde{a}\widetilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} = \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} U^{(\varkappa)}(a), \quad \bar{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} = \widetilde{a}\widetilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} = \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\big(U^{(\varkappa)}(a)\big)_{12\ldots f(\varkappa)}, \\ &\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} = \bar{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} U^{(\varkappa)}(a^{-1}), \qquad \tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} = \bar{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\big(U^{(\varkappa)}(a^{-1})\big)_{12\ldots f(\varkappa)}. \end{aligned} \tag{42}$$

We have

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \bar{\mathfrak{T}}^{(\lambda)} &= \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} U^{(\varkappa)}(a) \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)} U^{(\lambda)}(a) = (\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)})\big(U^{(\varkappa)}(a) \times U^{(\lambda)}(a)\big) \\ &= P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}\big(U^{(\varkappa)}(a) \times U^{(\lambda)}(a)\big) \\ &= P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \bar{\mathfrak{T}}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(a)^{-1} & & \\ & U^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))}(a)^{-1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}\big(U^{(\varkappa)}(a) \times U^{(\lambda)}(a)\big). \end{aligned}$$

Hence the matrix

(44)

$$P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} U^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(a)^{-1} & & \\ & U^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))}(a)^{-1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}\big(U^{(\varkappa)}(a) \times U^{(\lambda)}(a)\big) = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} U^{(1)}(a)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & U^{(k)}(a)^{-1} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}\big(U^{(\varkappa)}(a) \times U^{(\lambda)}(a)\big)$$

plays the same roll for $\bar{\mathfrak{T}}^{(\mu)}$ as $B_{\varkappa,\lambda}$ for $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu)}$. Expressing $B_{\varkappa,\lambda}$ by $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$, according to (40), we obtain the desired formula of transformation of $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ with respect to the possible different choices of the isomorphism between $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{A}$. To $\mathfrak{A}$ is associated a class of systems $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ which are mutually related by such transformations.

**Theorem 1.** *Let all the absolutely irreducible representations of $G$ lie in $\Omega$. To each Galois algebra $\mathfrak{A}$ over $\Omega$ with Galois group $G$ is associated a class of systems $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$, mutually related by transformations which carry $A_{\varkappa,\lambda}$ into the matrix consisting of the 1st, ..., $f(\lambda)$-th, $v(\lambda)+1$ st, ..., $v(\lambda)+f(\lambda)$-th, ..., $(f(\varkappa)-1)\,v(\lambda)+f(\lambda)$-th columns of the matrix* (44), *$a$ being a regular element in $\mathfrak{G}$, with $B_{\varkappa,\lambda} = B_{\varkappa,\lambda}(\{A_{\varkappa,\lambda}\})$* ((40)). *The multiplication in $\mathfrak{A}$*

*is given in terms of a system* $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ *by* (35), *and the operation of* $z \in G$ *on* $\mathfrak{A}$ *by* (32). *Conversely any system* $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ *of matrices in* $\Omega$, *with respective type* $\big(v(\varkappa)\, v(\lambda),\ f(\varkappa)\, f(\lambda)\big)$, *gives rise to a Galois algebra over* $\Omega$ *with Galois group* $G$.

## § 5. Associativity, commutativity and semisimplicity.

Now we want to see how certain properties of $\mathfrak{A}$, such as listed, reflect upon $A_{\varkappa,\lambda}$. We have, firstly, $J_{\varkappa,\lambda}^{-1}(V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})\, J_{\varkappa,\lambda} = V^{(\lambda)} \times V^{(\varkappa)}$ ((25)). If $\mathfrak{A}$ is commutative, the same permutation matrix $J_{\varkappa,\lambda}$ will give

$$J_{\varkappa,\lambda}^{-1}\big(\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)}\big)\, J_{\varkappa,\lambda} = \tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)} \times \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}. \tag{45}$$

But the right hand side is equal to $P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\lambda,\varkappa} B_{\varkappa,\lambda}$; observe (26). Comparing with (37), noticing that $B_{\varkappa,\lambda}$ is uniquely determined, and taking (27) into account, we obtain

$$B_{\lambda,\varkappa} = J_{\varkappa,\lambda}^{-1} B_{\varkappa,\lambda} J_{\varkappa,\lambda} \quad \big(\text{or } B_{\lambda,\varkappa}(\{A_{\varkappa,\lambda}\}) = J_{\varkappa,\lambda}^{-1} B_{\varkappa,\lambda}(\{A_{\varkappa,\lambda}\})\, J_{\varkappa,\lambda}\big), \tag{46}$$

which gives in fact the necessary and sufficient condition for the commutativity of $\mathfrak{A}$; the condition being certainly linear in the elements of $A_{\varkappa,\lambda}$.

Next we observe that

$$(V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)}) \times V^{(\mu)} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} \times V^{(\mu)} = \big(P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \times I_{v(\mu)}\big)\left(\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \times V^{(\mu)}\right)(P_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)})$$

$$= \big(P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \times I_{v(\mu)}\big)\begin{pmatrix} P^{-1}_{\omega_2(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}(P_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)}),$$

$$V^{(\varkappa)} \times (V^{(\lambda)} \times V^{(\mu)}) = V^{(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\lambda,\mu} = \big(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu}^{-1}\big)\left(V^{(\varkappa)} \times \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\right)(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})$$

$$= \big(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu}^{-1}\big) H_{\varkappa,\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\varkappa)} \times V^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})$$

$$= \big(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu}^{-1}\big) H_{\varkappa,\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} P^{-1}_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})$$

$$= \big(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu}^{-1}\big) H_{\varkappa,\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} P^{-1}_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L_{\varkappa,\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})$$

with combinatoric permutation matrices $H_{\varkappa,\lambda,\mu}$ and $L_{\varkappa,\lambda,\mu}$, satisfying

$$H_{\varkappa,\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\varkappa)} \times V^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu} = V^{(\varkappa)} \times \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$L_{\varkappa,\lambda,\mu}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L_{\varkappa,\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}; \tag{48}$$

for the latter observe that the totality of the $\omega_i(\varkappa, \omega_j(\lambda, \mu))$ coincides with that of the $\omega_i(\omega_j(\varkappa, \lambda), \mu)$. Hence

$$(49)\qquad L_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)}\times P_{\lambda,\mu}) = Q_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} P_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}(P_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)})$$

with a non-singular matrix $Q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ commutative with the representation $\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$.

Then

$$Q^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} Q^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

and there exists a matrix $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ such that

$$(50)\qquad Q^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} R_{\varkappa,\lambda,\mu}.$$

The matrices $H_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $L_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $Q_{\varkappa,\lambda,\mu}$, and $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ all depend on $G$ (and $\Omega$) only. Now

$$(\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\times\tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)})\times\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu)} = P^{-1}_{\varkappa,\lambda}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda}B_{\varkappa,\lambda}\times\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu)}$$

$$= (P^{-1}_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)})\left(\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\times\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu)}\right)(P_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)})(B_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)})$$

$$= (P^{-1}_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)})\begin{pmatrix} P^{-1}_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}(P_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)})(B_{\varkappa,\lambda}\times I_{v(\mu)}),$$

$$\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\times(\tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)}\times\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu)}) = \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\times P^{-1}_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\lambda,\mu}B_{\lambda,\mu}$$

$$= (I_{v(\varkappa)}\times P^{-1}_{\lambda,\mu})\left(\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\times\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\right)(I_{v(\varkappa)}\times P_{\lambda,\mu})(I_{v)\varkappa)}\times B_{\lambda,\mu})$$

$$= (I_{v(\varkappa)}\times P^{-1}_{\lambda,\mu})H^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)}\times\tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)}\times P_{\lambda,\mu})(I_{v(\varkappa)}\times B_{\lambda,\mu})$$

$$= (I_{v(\varkappa)}\times P^{-1}_{\lambda,\mu})H^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} P^{-1}_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)}\times P_{\lambda,\mu})(I_{v(\varkappa)}\times B_{\lambda,\mu})$$

$$= (I_{v(\varkappa)}\times P^{-1}_{\lambda,\mu})H^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} P^{-1}_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)}\times P_{\lambda,\mu})(I_{v(\varkappa)}\times B_{\lambda,\mu}).$$

If $\mathfrak{A}$ is associative, then these two expressions must be equal, and we get, in view of (49), (50) (and the linearity of $\sim$),

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1}_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} (P_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)})\,(B_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)})$$

$$= \begin{pmatrix} P_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} (P_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)})\,(I_{v(\mu)} \times P^{-1}_{\lambda,\mu})\, H^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} P^{-1}_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\omega_2(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})\,(I_{v(\varkappa)} \times B_{\lambda,\mu})$$

$$= Q^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} L^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})\,(I_{v(\varkappa)} \times B_{\lambda,\mu})$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} R_{\varkappa,\lambda,\mu} L_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{v(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})\,(I_{v(\varkappa)} \times B_{\lambda,\mu}).$$

Thus we have

$$(51)^{13)} \quad \begin{pmatrix} P^{-1}_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} (P_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)})\,(B_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)}) = R_{\varkappa,\lambda,\mu} L_{\varkappa,\lambda,\mu} \begin{pmatrix} P_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\varkappa,\omega_1(\lambda,\mu)} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu}(I_{\lambda(\varkappa)} \times P_{\lambda,\mu})\,(I_{\lambda,\varkappa} \times B_{\lambda,\mu}),$$

and this gives a necessary and sufficient condition for the associativity of $\mathfrak{A}$; it can again be expressed in terms of $A_{\varkappa,\lambda}$ and is of course linear[14]).

---

[13]) We may reform the equation by means of $G_{\varkappa,\lambda}$.

[14]) If we have any associative Galois algebra $\mathfrak{A}$, then conversely $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ may be calculated from our formula (51). For instance, the Galois algebra of $\Omega$-functions on $G$, which will be considered in § 8 below, will serve for this purpose. Indeed, for a little modified formulation with group-matrices $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ (§ 7) instead of $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$, we obtain the $B_{\varkappa,\lambda}$ as unit matrices. And this yields that $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ is merely the inverse of $Q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ given by (49), for such a modified formulation; which is however evident also from the definition of $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in case of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$. (Thus, in our present case (with $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$) $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ is equal to the transform of $Q^{-1}_{\varkappa,\lambda,\mu}$ by

$$\begin{pmatrix} Z^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1}$$

with the $Z$'s in (70) below.) This remark refers to the connection of our formula with *Hasse*'s neater one (for the semisimple case).

Finally, since the system $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ gives, by (35), the multiplication in $\mathfrak{A}$, it is also clear that the regular discriminant of $\mathfrak{A}$ may be expressed in terms of (elements of) $A_{\varkappa,\lambda}$. Provided $\mathfrak{A}$ is associative, its non-vanishing is necessary and sufficient in order that $\mathfrak{A}$ be absolutely semisimple and its capacities be all indivisible by the characteristic of $\Omega$. However, if we assume the commutativity besides the associativity, a second expression for the discriminant can be obtained as follows. We observe that then the relative trace $\mathrm{Sp}(a)$ of an element $a \in \mathfrak{A}$ may be given as the sum $\sum_{z\in G} az$. So the matrix composed of the traces of the elements of $\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}$ is

$$\sum (\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} \times \tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}) z = \sum_{z\in G} \left( P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & \tilde{\mathfrak{T}}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} \right) z$$

$$= P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \left( \sum_{z\in G} \begin{pmatrix} V^{(1)}(z) & & \\ & \ddots & \\ & & V^{(k)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{B}}^{(k)} \end{pmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}.$$

Now assume that our bases $\mathfrak{v}^{(\mu)}$ of $e^{(\mu)}\mathfrak{G}$ be chosen in accord with composition series, so that we have (28). Then $\sum_{z\in G} V^{(\varkappa)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\gamma (\in \Omega) \neq 0)$ or 0 according as $\varkappa = 1$ or not ((31)). We have indeed $\gamma t^{(1)}_{v(1)} = \sum_{z\in G} z$, and $\tilde{\gamma} t^{(1)}_{v(1)} = \mathrm{Sp}\,\tilde{1}$. This latter does not vanish, since $t^{(1)}_{v(1)} \neq 0$. Thus (52) becomes $\mathrm{Sp}\,\tilde{1}$ times

$$(53) \quad P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda};$$

note that in (53) the factors other than $A_{\varkappa,\lambda}$ do not depend on $\mathfrak{A}$ but are defined only by $G$ (and $\Omega$). Now the part of our discriminant matrix corresponding to the products of the basis elements from $\tilde{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)}$ and $\tilde{\mathfrak{B}}^{(\lambda)}$ can be obtained from (52) by virtue of a certain easily describable rearrangement of elements, and hence similarly from (53) up to the constant factor $\mathrm{Sp}\,\tilde{1}$. We observe also that a commutative and associative Galois algebra $\mathfrak{A}$ is necessarily absolutely semisimple whenever it is semisimple, as the Galois theory shows. We summarize all this as follows:

**Theorem 2.** (46) (*resp.* (51), *with* $B_{\varkappa,\lambda} = B_{\varkappa,\lambda}(\{A_{\varkappa,\lambda}\})$ ((40))) *gives the necessary and sufficient condition that our Galois algebra* $\mathfrak{A}$ *be commutative* (*resp. associative*). *The regular discriminant of* $\mathfrak{A}$ *can be calculated easily from* $A_{\varkappa,\lambda}$. *Under the assumption of associativity and commutativity its* (*absolute*) *semisimplicity criterion may also be given by the non-vanishing of the determinant of a matrix composed of matrices obtained respectively from* (53) *by a certain well-defined rearrangement of elements.*

## § 6. Different choice of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$.

Throughout the above consideration we fixed our choice of $e^{(\varkappa)}$, $c^{(\varkappa)}_{ij}$, $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ and $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$. Let us now analyze briefly the change of situation with respect to a different choice of them. We shall, and may, however leave our choice of $\omega_\ell$ and the permutation matrices $J_{\varkappa,\lambda}$, $H_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $L_{\varkappa,\lambda,\mu}$ as well as $G_{\varkappa,\lambda}$ invariant.

We first treat the case where $e^{(\varkappa)}$, $c_{ij}^{(\varkappa)}$ are the same as before. Let $\hat{\mathfrak{v}}^{(\varkappa)}$ be a new basis of $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$, with $e^{(\varkappa)}$ as its first term. Define $\hat{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)}$ correspondingly. Then

$$\hat{\mathfrak{v}}^{(\varkappa)} = Y^{(\varkappa)^{-1}}\,\mathfrak{v}^{(\varkappa)},\quad \hat{\mathfrak{B}}^{(\varkappa)} = Y^{(\varkappa)^{-1}}\,\mathfrak{B}^{(\varkappa)} \tag{54}$$

with a non-singular matrix $Y^{(\varkappa)}$ whose first row is $(1, 0, \ldots, 0)$. The corresponding representation of $G$ is[15])

$$\hat{V}^{(\varkappa)} = Y^{(\varkappa)^{-1}} V^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}. \tag{55}$$

If we take further a second basis $(e, s_2, \ldots, s_u)$ $X^{(\varkappa)^{-1}}$ for $\mathfrak{G}e = \mathfrak{G}e^{(\varkappa)}$, $X^{(\varkappa)}$ with 1st column $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, we have a new matrix $\hat{\mathfrak{T}}_e = Y^{(\varkappa)^{-1}}\mathfrak{T}_e X^{(\varkappa)^{-1}}$ consisting of elements of $\mathfrak{G}e\mathfrak{G} = \mathfrak{G}e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$. $X^{(\varkappa)}$ becomes of a certain particular form when we take our new basis of $\mathfrak{G}e^{(\varkappa)}$ in a form similar to (15). Anyway we have, using $X^{(\varkappa)}$ for this case,

$$\hat{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} = Y^{(\varkappa)^{-1}}\mathfrak{T}^{(\varkappa)} X^{(\varkappa)^{-1}} \tag{56}$$

and

$$\hat{\mathfrak{T}}^{(\varkappa)} = \hat{S}^{(\varkappa)}\hat{K}^{(\varkappa)*}\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{B}}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\mathfrak{B}}^{(k)}\end{pmatrix}\hat{K}^{(\varkappa)}. \tag{57}$$

$\hat{K}^{(\varkappa)}$, $\hat{K}^{(\varkappa)*}$ can be obtained from $K^{(\varkappa)}$, $K^{(\varkappa)*}$ by means of an easy permutation of columns or rows, respectively[16]). As to $\hat{S}^{(\varkappa)}$, we refrain here from expressing its defect from $S^{(\varkappa)}$ explicitely.

We may employ, as new $P_{\varkappa,\lambda}$,

$$\hat{P}_{\varkappa,\lambda} = \begin{pmatrix}Y^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & Y^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}^{-1} P_{\varkappa,\lambda}(Y^{(\varkappa)} \times Y^{(\lambda)}). \tag{58}$$

Since $J_{\varkappa,\lambda}$ transforms $Y^{(\varkappa)} \times Y^{(\lambda)}$ into $Y^{(\lambda)} \times Y^{(\varkappa)}$, too, we have $\hat{P}_{\varkappa,\lambda}J_{\varkappa,\lambda} = \hat{P}_{\lambda,\varkappa}$ also. (34) shows that $A_{\varkappa,\lambda}$ will be changed into

(59)

$$\hat{A}_{\varkappa,\lambda} = \hat{P}_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix}X^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & X^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots\end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda}A_{\varkappa,\lambda} = (Y^{(\varkappa)} \times Y^{(\lambda)})^{-1} P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix}Y^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & Y^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & X^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots\end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda}A_{\varkappa,\lambda}$$

$$= (Y^{(\varkappa)} \times Y^{(\lambda)})^{-1} P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda}\begin{pmatrix}Y^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & Y^{(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & X^{(k)}\end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}.$$

---

[15]) (Under our accessory condition) $Y^{(\varkappa)}$ is determined uniquely by $\hat{V}^{(\varkappa)}$ and in particular it is the unit matrix in case $\hat{V}^{(\varkappa)} = V^{(\varkappa)}$. This can be seen from the fact that the identity is the only automorphism of $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$ leaving $e^{(\varkappa)}$ fixed. Similarly for $X^{(\varkappa)}$ below in connection with $\hat{U}^{(\varkappa)}$.

[16]) If the order of the composition residue-moduli of $\mathfrak{G}e^{(\varkappa)}$ is unchanged, then $\hat{K}^{(\varkappa)} = K^{(\varkappa)}$, $\hat{K}^{(\varkappa)*} = K^{(\varkappa)*}$. This is certainly the case, when $\hat{U}^{(\varkappa)} = U^{(\varkappa)}$.

Further $B_{\varkappa,\lambda}$ will be changed into

$$\hat{B}_{\varkappa,\lambda} = \hat{P}_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} X^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & X^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda} (X^{(\varkappa)} \times X^{(\lambda)})^{-1}$$

$$(60) \qquad = (Y^{(\varkappa)} \times Y^{(\lambda)})^{-1} P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} Y^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & Y^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & X^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda} (X^{(\varkappa)} \times X^{(\lambda)})^{-1}$$

$$= (Y^{(\varkappa)} \times Y^{(\lambda)})^{-1} P_{\varkappa,\lambda} G'_{\varkappa,\lambda}\begin{pmatrix} Y^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & Y^{(k)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & X^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda} (X^{(\varkappa)} \times X^{(\lambda)})^{-1}.$$

In terms of $\hat{B}_{\varkappa,\lambda}$ the commutativity condition will appear exactly the same as before in terms of $B_{\varkappa,\lambda}$. As to the associativity condition, we observe first that the new $\hat{Q}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, which is

$$L_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} \hat{P}_{\varkappa,(\omega_1(\lambda,\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} H_{\varkappa,\lambda,\mu} (I_{v(\varkappa)} \times \hat{P}_{\lambda,\mu}) (\hat{P}_{\varkappa,\lambda} \times I_{v(\mu)})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{P}_{\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1},$$

can be transformed from $Q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ by $\begin{pmatrix} Y^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$:

$$(61) \qquad \hat{Q}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} Y^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1} Q_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} Y^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

as we see from the transformation properties (47), (48) of $H_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $L_{\varkappa,\lambda,\mu}$, which may be applied to $Y$'s instead of $V$'s, and the relation (58). Hence

$$(62) \qquad \hat{R}_{\varkappa,\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} X^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} R_{\varkappa,\lambda,\mu}\begin{pmatrix} X^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1}.$$

By means of these $\hat{R}_{\varkappa,\lambda,\mu}$ and $\hat{P}_{\varkappa,\lambda}$ the associativity condition can be formulated in terms of $\hat{B}_{\varkappa,\lambda}$. As for our semisimplicity criterion, we have already observed the changes of matrices that appear in (53). Now, since there was much ambiguity in our formula (40), the same is the case for its behaviour with respect to our change of basis. However, if we have a certain expression (40) of $B_{\varkappa,\lambda}$ in terms of $A_{\varkappa,\lambda}$, then we have, by virtue of (59), (60),

$$(63) \quad \hat{B}_{\varkappa,\lambda} = \hat{P}_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} X^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & X^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} B_{\varkappa,\lambda}\left\{P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} X^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))} & & \\ & X^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \hat{P}_{\varkappa,\lambda} \hat{A}_{\varkappa,\lambda}\right\} (X^{(\varkappa)} \times X^{(\lambda)})^{-1}$$

as an expression of $\hat{B}_{\varkappa,\lambda}$ in terms of $\hat{A}_{\varkappa,\lambda}$; here we may, if we wish, express $P_{\varkappa,\lambda}$ in terms of $\hat{P}_{\varkappa,\lambda}$ (and $Y^{(\varkappa)}$), and conversely.

Let us now turn to the general case where $e_i^{(\varkappa)}$, $c_{ij}^{(\varkappa)}$ are changed. Such change can[17]) be effected by an inner automorphism $\theta$, say, of $\mathfrak{G}$ which does not disturb the order in the index system $\{\varkappa\}$ (in an easily conceivable sense). If we employ $\mathfrak{v}^{(\varkappa)\theta}$ as our basis for $e^{(\varkappa)\theta}\mathfrak{G}$, and similarly take $\mathfrak{T}^{(\varkappa)\theta}$, then $V^{(\varkappa)}$ will be changed into $V^{(\varkappa)\theta}$, with $V^{(\varkappa)\theta}(z^\theta) = V^{(\varkappa)}(z)$. But (not only $J_{\varkappa,\lambda}$, $G_{\varkappa,\lambda}$, $H_{\varkappa,\lambda,\mu}$ and $L_{\varkappa,\lambda,\mu}$) $K^{(\varkappa)}$, $K^{(\varkappa)*}$ and $S^{(\varkappa)}$ remain the same. Let $b$ be

[17]) [4].

the element of $\mathfrak{G}$ effecting our inner automorphism $\theta$. Then $V^{(\varkappa)\theta} = V^{(\varkappa)}(b)\, V^{(\varkappa)}\, V^{(\varkappa)}(b)^{-1}$, and we shall, as we may, take

(64)
$$\dot{P}_{\varkappa,\lambda} = \begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(b) & & \\ & V^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))}(b) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda}\big(V^{(\varkappa)}(b) \times V^{(\lambda)}(b)\big)^{-1} = P_{\varkappa,\lambda}(V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})(b)\big(V^{(\varkappa)}(b) \times V^{(\lambda)}(b)\big)^{-1}$$

as our substitute for $P_{\varkappa,\lambda}$. Further, $Q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ and $R_{\varkappa,\lambda,\mu}$ will be transformed respectively by

$$\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))}(b) & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} U^{(\omega_1(\omega_1(\varkappa,\lambda),\mu))}(b) & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}^{-1}$$

to yield $\dot{Q}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $\dot{R}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, as in the case of $\hat{Q}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $\hat{R}_{\varkappa,\lambda,\mu}$ above ((61), (62)); (indeed one has only to replace $Y^{(\varkappa)}$, $X^{(\varkappa)}$, by $V^{(\varkappa)}(b)^{-1}$, $U^{(\varkappa)}(b)$ respectively).

Further $(\widetilde{\mathfrak{B}^{(\varkappa)\theta}} \times \widetilde{\mathfrak{B}^{(\lambda)\theta}}) = (\widetilde{b^{-1}\mathfrak{B}^{(\varkappa)}b} \times \widetilde{b^{-1}\mathfrak{B}^{(\lambda)}b}) = \big(V^{(\varkappa)}(b) \times V^{(\lambda)}(b)\big)\,(\widetilde{b^{-1}\mathfrak{B}^{(\varkappa)}} \times \widetilde{b^{-1}\mathfrak{B}^{(\lambda)}})$. Similarly

$$P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))\theta}} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} V^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}(b) & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{b^{-1}\mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = (V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})(b)\, P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{b^{-1}\mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hence, if $\{\dot{A}_{\varkappa,\lambda}\}$ denotes the new system of multiplicative matrices, then

$$(65) \qquad \widetilde{b^{-1}\mathfrak{B}^{(\varkappa)}} \times \widetilde{b^{-1}\mathfrak{B}^{(\lambda)}} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{b^{-1}\mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\dot{P}_{\varkappa,\lambda}\dot{A}_{\varkappa,\lambda}$$

$$= P_{\varkappa,\lambda}^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{b^{-1}\mathfrak{T}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))}} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{(\varkappa,\lambda)}(V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})(b)\big(V^{(\varkappa)}(b) \times V^{(\lambda)}(b)\big)^{-1}\dot{A}_{(\varkappa,\lambda)}.$$

This shows however that $\{(V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})(\bar{b})\big(V^{(\varkappa)}(\bar{b}) \times V^{(\lambda)}(b)\big)^{-1}\dot{A}_{\varkappa,\lambda}\}$ is exactly the system which we obtain with respect to our original basis by taking $^{-}$ (of § 4) with $a = b^{-1}$ instead of $\sim$; a situation we have already observed in § 4. The same is true for the change of $\{B_{\varkappa,\lambda}\}$. So our general case can be analyzed by combining our above observations with that in § 4, though it can also be done directly without appealing to § 4.

## § 7. Modification, representation and rearrangement of basis elements; group-matrices.

We first observe that our particular form (2) of the basis $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$ for $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$, having $e^{(\varkappa)}$ as its first term, did not have a very essential signification in our above treatment, except perhaps in the form of the matrix (53)[18]) and in certain parts of § 6. We may as well take any basis of $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$, and moreover, use any basis $(u_1^{(\varkappa)}, u_2^{(\varkappa)}, \ldots, u_{f(\varkappa)}^{(\varkappa)})$ of $\mathfrak{G}e^{(\varkappa)}$ modulo $\mathfrak{N}e^{(\varkappa)}$, in place of $(e^{(\varkappa)}, c_{21}^{(\varkappa)}, \ldots, c_{f(\varkappa)1}^{(\varkappa)})$, to construct substitutes for $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ and $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$. Then we can proceed in exactly the same manner as in §§ 2, 3 except for some minor unessential changes. We want to observe, however, that to take here

$$(66) \qquad \big((u_1^{(\varkappa)}, u_2^{(\varkappa)}, \ldots, u_{f(\varkappa)}^{(\varkappa)}),\ (u_1^{(\varkappa_2)}, u_2^{(\varkappa_2)}, \ldots)\, r_2, \ldots\big),$$

rather than an arbitrary basis of $\mathfrak{G}e^{(\varkappa)}$, has the effect to give a relation similar to (16); otherwise we would have to deal with a more complicated formula.

---

[18]) Even in (the form of) (53), only the reduced form of $V^{(f)}$ was essential.

Now we construct the group-matrix, as we may call it in a rather modified sense,

$$\mathfrak{Z}^{(\varkappa)} = \sum_{z \in G} V^{(\varkappa)}(z^{-1})\, z \tag{67}$$

of degree $v(\varkappa)$ in $\mathfrak{G}$. It satisfies

$$\mathfrak{Z}^{(\varkappa)} z = V^{(\varkappa)}(z)\, \mathfrak{Z}^{(\varkappa)}, \tag{68}$$

$$z\, \mathfrak{Z}^{(\varkappa)} = \mathfrak{Z}^{(\varkappa)}\, V^{(\varkappa)}(z). \tag{69}$$

We have, because of (68),

$$\mathfrak{Z}^{(\varkappa)} = \mathfrak{T}^{(\varkappa)} Z^{(\varkappa)} \tag{70}$$

with certain $Z^{(\varkappa)}$.

Assume that $V^{(\varkappa)}$ is taken in the reduced form (28). It is well known, and easy to see, that the $v(\varkappa)$ coefficients in the 1st row (or any one of the first $f(\varkappa)$ rows) of $V^{(\varkappa)}$ are linearly independent[19]), and so the same is the case for the $v(\varkappa)$ elements of the 1st row of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$. [Hence $Z^{(\varkappa)}$ is non-singular (which is, however, true without assuming our special form (28) of $V^{(\varkappa)}$). We have $Z^{(\varkappa)-1} U^{(\varkappa)} Z^{(\varkappa)} = V^{(\varkappa)}$.] Similarly the $v(\varkappa)$ elements in the last column of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ are linearly independent, and span a right-ideal of $\mathfrak{G}$ isomorphic to $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$ (generated as a matter of fact by a primitive idempotent which we may employ as $e^{(\varkappa)}$ if we wish). Denote this last column of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ by $\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$. For every $i$, the $(i, j)$-element in $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ can be obtained from the $i$-th element of $\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$ (that is, the $(i, v(\varkappa))$-element of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$) by multiplying from the left an element whose representation matrix, in $V^{(\varkappa)}$, has the last column

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j,$$

as we see from (69); here we observe that the element can be chosen independent of $i$. With the system of these $v(\varkappa)$ elements, taken here for $j = 1, 2, \ldots, v(\varkappa)$, instead of (7), and with $\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$ in place of $\mathfrak{v}^{(\varkappa)}$, our $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ assumes a form similar to $\mathfrak{T}_e$ in (9).

Our $v(\varkappa)$ elements do not in general even span a left-ideal. But, multiplied on the right by the primitive idempotent generator of the right-ideal spanned by $\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$, they form a basis of the left-ideal generated by that idempotent. Similarly modulo the radical $\mathfrak{N}$ for the system of the last $f(\varkappa)$ of our elements. However, in order to be able to have our system in a form similar to (66), though with reversed order of terms, we have to take our $V^{(\varkappa)}$ in a more specified form. For this we assume $V^{(\varkappa)}$ as defined by a basis of $e^{(\varkappa)}\mathfrak{G}$ having a form similar, or rather (right-left) symmetric, to (66); this is more than to assume that the diagonal irreducible constituents of $V^{(\varkappa)}$ have the same form as the first (or last) constituent of the corresponding $V^{(\mu)}$. Then we see that we may suppose that our system has the form (66) except for the order of terms, which should be reversed. Thus we have before us the situation described in the beginning of the present section, up to the rather unessential order of elements; recollect the above remark, though it is also possible to take our elements so as to form by themselves a basis of the alluded left-ideal. Hence we can develop our theory with $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$, defined by such a normalized $V^{(\varkappa)}$, in place of $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$, and with the matrix $\mathfrak{W}^{(\varkappa)}$ composed of the last $f(\varkappa)$ columns of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ in place of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$.

(Moreover, the orthogonality relations (29), (30) show that, instead of the (precise) matrix units in $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$, certain elements congruent to them modulo $\mathfrak{N}$ appear in $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$[20]).

---

[19]) As a matter of fact, the $v(\varkappa)\, f(\varkappa)$ elements in the first $f(\varkappa)$ rows of $V^{(\varkappa)}$ are altogether linearly independent. This may also be seen from the following.

[20]) In fact it is also possible to obtain conversely a new proof for the orthogonality by further pursuing our consideration, as the writer wants to discuss elsewhere.

Thus the situation is much nearer to our original case than the modification referred to is in general.)

In fact, we could, if wished, start with group-matrices and argue representation-theoretically[21]), though some traces of the structural theory would perhaps necessarily remain in order to normalize $V^{(\varkappa)}$ and $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$, as above (in the modular case with which we are concerned). But we preferred to present our theory in our structural way in order to bring to light its inner formation.

Our final small remark is about the arrangement of basis elements. The above observation on group-matrices suggests, as also noted above, taking our basis (15) in reverse order (or taking at least the composition moduli in reverse order). Indeed, if we wish that $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$ behaves under left-operators from $G$ also in terms of $V^{(\varkappa)}$ (rather than in terms of $U^{(\varkappa)}$ equivalent to $V^{(\varkappa)}$) as $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ does, then we must make such a reversal of the order of terms in (15) (or in (2))[22]).

## § 8. Appendix: Duality.

Consider our group ring $\mathfrak{G} = G(\Omega)$ as $\Omega$-linear space, and then introduce in it the usual coefficient-wise multiplication. We denote by $\mathfrak{G}^+$ the algebra so obtained. Thus $\mathfrak{G}^+$ is the algebra of $\Omega$-functions on $G$, and we denote its elements in the notation of functions. In doing so we write however $\alpha$ with $\alpha(x) = \alpha_{x^{-1}}$ for $\sum_{x \in G} \alpha_x x$. We define $\alpha^z$ $(z \in G)$ by $\alpha_z(x) = \alpha(zx)$, which amounts to preserve the old operation (right-multiplication) of $G$ on $\mathfrak{G}$. Then $\mathfrak{G}^+$ becomes an (associative, commutative and, moreover, semisimple and indeed split) Galois algebra, with Galois group $G$. In applying our theory of Galois algebras to $\mathfrak{G}^+$, we note that the images in $\mathfrak{G}^+$ of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$, $\mathfrak{T}^{(\varkappa)}$ are nothing else than themselves considered merely as matrices in $\mathfrak{G}^+$ (rather than in $\mathfrak{G}$). So we denote them by $\mathfrak{B}^{(\varkappa)+}$, $\mathfrak{T}^{(\varkappa)+}$. According to (35) we have

$$\mathfrak{B}^{(\varkappa)+} \times \mathfrak{B}^{(\lambda+)} = P_{\varkappa,\lambda} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{(1)+} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{B}^{(k)+} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K'^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} \tag{71}$$

with certain $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$, which describe the multiplication in $\mathfrak{G}^+$.

Now we have the following duality theorem, of Tannaka's type[23]):

*If a system $\{W^{(\varkappa)}\}$ of non-zero matrices in $\Omega$, with respective type $(v(\varkappa), f(\varkappa))$, satisfies the relations* (71) *with $W^{(\varkappa)}$ in place of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)+}$, then there exists an element $x$ in $G$ such that the $W^{(\varkappa)}$ are the value-matrices of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)+}$ at $x$.*

For, the assumption means that $\mathfrak{B}^{(\varkappa)+} \to W^{(\varkappa)}$ gives a (1-dimensional) representation of $\mathfrak{G}^+$ in $\Omega$. On the other hand, every such irreducible representation of $\mathfrak{G}^+$ can be realized by taking the value at a point, that is, for an element of $G$.

A more elegant expression can be given to our theorem when we employ the group-matrix formulation as in § 7, which has also the significance to determine our $A_{\varkappa,\lambda}$[24]).

---

[21]) That way would have been more parallel to *Hasse*'s treatment than ours, too. Moreover, the group-matrix formulation has also some strong points (though perhaps weak points, too); see for instance footnote [14]) and § 8 below. Anyway the writer wishes to discuss the connection of the two methods more precisely elsewhere.

[22]) And that will enable us, for instance, to replace the product of the first three factors in (44) by $(U^{(\varkappa)} \times U^{(\lambda)})(a)^{-1} = (V^{(\varkappa)} \times V^{(\lambda)})(a)^{-1}$, which is particularly convenient in observing the changes of $\{B_{\varkappa,\lambda}\}$ and $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ for different choices of $e_i^{(\varkappa)}$, $c_{ij}^{(\varkappa)}$, discussed at the end of § 7.

[23]) [10].

[24]) $\{A_{\varkappa,\lambda}\}$ is obtained from the system $\{E_{\varkappa,\lambda}\}$ below by a procedure similar to that in § 6.

For this purpose we take $\mathfrak{W}^{(\varkappa)}$, as introduced at the end of § 7, instead of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$. The Kronecker products $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)+} \times \mathfrak{Z}^{(\lambda)+}$, $\mathfrak{W}^{(\varkappa)+} \times \mathfrak{W}^{(\lambda)+}$ in $\mathfrak{G}^+$ are nothing else than the Kronecker products as representations (or parts of representations, so to say). Hence

$$(72) \qquad \mathfrak{Z}^{(\varkappa)+} \times \mathfrak{Z}^{(\lambda)+} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}^{(\omega_1(\varkappa,\lambda))+} & & \\ & \mathfrak{Z}^{(\omega_2(\varkappa,\lambda))+} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P_{\varkappa,\lambda} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}^{(1)+} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{Z}^{(k)+} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda}.$$

Thus the system $\{B_{\varkappa,\lambda}\}$ corresponding to our $\mathfrak{G}^+$ and $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$ is merely the system of unit matrices. And, the corresponding $A_{\varkappa,\lambda}$ is, for each $\varkappa, \lambda$, the matrix consisting of the $v(\lambda)-f(\lambda)+1,\ v(\lambda)-f(\lambda)+2, \ldots, v(\lambda),\ 2v(\lambda)-f(\lambda)+1, \ldots, 2v(\lambda), \ldots, v(\varkappa)v(\lambda)$-th columns[25]) of the unit matrix $I_{v(\varkappa)v(\lambda)}$. Denoting this matrix, having one 1 in each column, by $E_{\varkappa,\lambda}$, we see that $\mathfrak{W}^{(\varkappa)+} \times \mathfrak{W}^{(\lambda)+}$ is given by the formula (35) with $\mathfrak{W}^{(\varkappa)}$ instead of $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}$ and with $E_{\varkappa,\lambda}$ instead of $A_{\varkappa,\lambda}$. Thus our duality theorem assumes the form:

*If a system $\{W^{(\varkappa)}\}$ of matrices in $\Omega$, with respective type $(v(\varkappa), f(\varkappa))$, satisfies*

$$(73) \qquad W^{(\varkappa)} \times W^{(\lambda)} = P_{\varkappa,\lambda}^{-1} G'_{\varkappa,\lambda} \begin{pmatrix} S^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & S^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(1)*} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)*} \end{pmatrix} \left( I_k \times \begin{pmatrix} W^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & W^{(k)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & K^{(k)} \end{pmatrix} G_{\varkappa,\lambda} P_{\varkappa,\lambda} E_{\varkappa,\lambda},$$

*then either all $W^{(\varkappa)}$ vanish or $W^{(\varkappa)}$ are the value-matrices at a certain element in $G$ of the last $f(\varkappa)$ columns of the representations $V^{(\varkappa)}$*[26]).

The above transfers, though rather complicated, Hasse's theory to modular case. If we deal with the extremely modular case of $p$-groups $G$, $p$ being the characteristic of $\Omega$, then we come into contact with the Artin-Schreier-Albert-Witt theory of $p$-extensions. Our theory has, as it ought to, also some arithmetical applications. To those the writer wants to come back elsewhere.

## References.


[1] *R. Brauer*, On hypercomplex arithmetic and a theorem of Speiser. A. Speiser-Festschrift, Zürich 1945.

[2] *R. Brauer-C. Nesbitt*, On the modular characters of groups. Ann. of Math. **42** (1941).

[3] *H. Hasse*, Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe. J. reine angew. Math. **187** (1950).

[4] *A. Malcev*, On the representation of an algebra as a direct sum of the radical and a semi-simple subalgebra. C. R. URSS. **36** (1942).

[5] *T. Nakayama*, Some studies on regular representations, induced representations and modular representations. Ann. of Math. **39** (1938).

[6] *T. Nakayama*, On Frobeniusean algebras. I. Ann. of Math. **40** (1939); II. ibid. **42** (1941); III. Jap. Journ. Math. **18** (1942).

[7] *T. Nakayama-C. Nesbitt*, Note on symmetric algebras. Ann. of Math. **39** (1938).

[8] *C. Nesbitt-R. Thrall*, Some ring theorems with applications to modular representations. Ann. of Math. **47** (1946).

[9] *M. Osima*, Note on the Kronecker product of representations of group. Proc. Acad. Japan **17** (1941).

[10] *T. Tannaka*, Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. Tohoku Math. J. **45** (1938).


[25]) Observe that $\mathfrak{W}^{(\varkappa)}$ consists of the last (rather than first) $f(\varkappa)$ columns of $\mathfrak{Z}^{(\varkappa)}$.

[26]) Here we assume that the $V^{(\varkappa)}$ are normalized as in § 7. Otherwise we should have to give a somewhat more complicated form to our formula and theorem, though the essential feature of the theorem would not be changed.

Eingegangen 22. April 1950.

# Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen.

Von *Wolfgang Krull* in Bonn.

Im folgenden handelt es sich im wesentlichen darum, in der Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen, also derjenigen Integritätsbereiche, die hinsichtlich der Teilbarkeitsverhältnisse ihrer Elemente mit den Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper aufs engste verwandt sind, gewisse Gesichtspunkte herauszuarbeiten, die weder bei rein bewertungstheoretischer Darstellung zur Geltung kommen, noch dann, wenn man nach Prüfer ausschließlich mit $v$-Idealen arbeitet bzw. den Idealäquivalenzbegriff von Artin-van der Waerden benutzt[1]). Das Hauptgewicht liegt auf den Fragestellungen; die Beweise und Sätze sind in der Regel ganz einfach.

In § 1 wird vorbereitend für beliebige Hauptordnungen (also für beliebige ganz abgeschlossene Integritätsbereiche) der Idealklassenbegriff in der gleichen Weise wie in der algebraischen Zahlentheorie eingeführt, und es wird gezeigt, daß man die *Primitivität* eines Polynoms über einer allgemeinen Hauptordnung $\mathfrak{R}$ so definieren kann, daß ein zwangloser und naturgemäßer Anschluß an den einfachsten Spezialfall der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten gewonnen wird. In § 2 werden die endlichen diskreten Hauptordnungen in leichter Abänderung des bewertungstheoretischen Ansatzes mit Hilfe des Divisorbegriffs charakterisiert, weil so die für die weiteren Betrachtungen nötigen bekannten Grundformeln am raschesten hergeleitet werden können. Das eigentliche Problem sind die Beziehungen zwischen beliebigen (Dedekindschen) und arithmetisch ausgezeichneten Divisoridealen[2]). Es wird gezeigt, wie sich formale Divisorsummen zur Berechnung von Idealprodukten der Gestalt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ benutzen lassen, und es werden

[1]) Die Bezeichnungen *Hauptordnung* und *endliche diskrete Hauptordnung* werden im selben Sinne benutzt wie in meinem Bericht über Idealtheorie, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgeb. **4**, Heft 3 (1935), Nr. **37** und **40**, im folgenden als *Idealbericht* zitiert. — Es sei daran erinnert, daß die endlichen diskreten Hauptordnungen idealtheoretisch dadurch gekennzeichnet sind, daß der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit aller Ideale in endlich viele Primidealfaktoren (Z.P.I.) gilt, wenn man entweder nach *Prüfer* mit $v$-Idealen arbeitet oder den Äquivalenzbegriff von *Artin* und *van der Waerden* benutzt. (Vgl. einerseits: *H. Prüfer*, Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern, J. f. Math. **168** (1932), 1—36, bzw. Idealbericht, Nr. **43**; andererseits: *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra **2**. 2. Aufl. (1938), § 103. Die Kenntnis der genannten Arbeiten wird im übrigen hier nicht vorausgesetzt, wie überhaupt nur die einfachsten Operationen und Begriffsbildungen aus der Idealtheorie, insbesondere der Begriff des reziproken Ideals $\mathfrak{a}^{-1}$, ohne Erklärung benutzt werden.

[2]) Die Divisorideale sind bei den endlichen diskreten Hauptordnungen identisch mit den Prüferschen $v$-Idealen. Für die Einführung des Divisorbegriffs war vorbildlich das kürzlich erschienene große Standardwerk von *H. Hasse*, Zahlentheorie, Berlin 1949. Denn obwohl es sich im Text, anders als bei *Hasse*, um ganz elementare Überlegungen handelt, erschien es empfehlenswert, die Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen soweit wie möglich in Übereinstimmung mit der Theorie der Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper zu entwickeln.

ideale Primitivpolynome definiert, mit deren Hilfe eine vom Verfasser gelegentlich angegebene Verschärfung des Kroneckerschen Satzes der Idealtheorie in einen größeren Zusammenhang eingeordnet werden kann.

Insbesondere aber wird untersucht, wann die Divisorideale hinsichtlich der gewöhnlichen (nicht der ad hoc eingeführten $v$-) Idealmultiplikation eine Gruppe bilden. Ist diese Bedingung — der übrigens mit Hilfe des Begriffs der Divisorklassen eine äußerlich völlig verschiedene Fassung gegeben werden kann — erfüllt, so läßt sich die Divisorsymbolik bei der Untersuchung beliebiger Ideale bequemer als sonst handhaben. Vor allem aber kann man überall dort, wo eine einzelne Stelle, d. h. ein einzelnes Primideal der gegebenen Hauptordnung $\mathfrak{R}$, ausgezeichnet ist, durch den Übergang zum Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ die Untersuchung in eine endliche diskrete Hauptordnung mit eindeutiger Primfaktorzerlegung der Elemente verlagern. Die Verhältnisse liegen hier demnach ähnlich wie bei den Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper, wo allerdings die $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ durchweg diskrete Bewertungsringe (also Ringe mit einem einzigen Primelement) sind.

Besitzt dagegen die Menge aller Divisorideale nicht die Gruppeneigenschaft hinsichtlich der gewöhnlichen Idealmultiplikation, so treten in $\mathfrak{R}$ Primideale $\mathfrak{q}$ auf — und zwar keine Divisorprimideale, sondern „niedere" Primideale im Sinne van der Waerdens[3]) — in deren Primidealquotientenringen $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ keine eindeutige Primelementzerlegung mehr möglich ist, so daß die Analogie zu den „lokalen" Verhältnissen bei den endlichen algebraischen Zahlkörpern aufhört. Man wird voraussichtlich bei der Weiterentwicklung der Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen derartige „kritische" Primideale besonders zu beachten haben.

## § 1. Idealklassen. Primitive Polynome über Hauptordnungen.

Es sei zunächst $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$. Betrachtet werden ganze und nicht ganze, von (0) verschiedene $\mathfrak{R}$-Ideale. Zwei $\mathfrak{R}$-Ideale $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ werden genau so wie in der algebraischen Zahlentheorie in die gleiche *Klasse* $K$ gerechnet, wenn sie proportional sind, $\mathfrak{a}_1 = \alpha \cdot \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2 = \alpha^{-1} \cdot \mathfrak{a}_1$. Das kleinste $\mathfrak{R}$-Ideal, das alle ganzen Ideale einer bestimmten Klasse $K$ umfaßt, möge, aus einem später klar werdenden Grunde, als das *Primitivideal* $\mathfrak{q}_K$ von $K$ bezeichnet werden[4]).

**Satz 1.** *Das Primitivideal* $\mathfrak{q}_K$ *von* $K$ *ist gleich* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ *für jedes beliebige Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $K$.

Ist nämlich $\beta\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ ganz, so ist $\beta \in \mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$; d. h. es ist $\mathfrak{q}_K \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$. Andererseits ist $\beta\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}_K$ für *jedes* $\beta \in \mathfrak{a}^{-1}$ und damit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subseteqq \mathfrak{q}_K$.

Ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$, das mit dem Primitivideal $\mathfrak{q}_K$ der zugehörigen Idealklasse zusammenfällt, wird zweckmäßig als *primitiv* bezeichnet. Aus Satz 1 folgt dann sofort:

**Folgerung.** $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann primitiv, wenn* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}$ ist.

Es sei jetzt $\mathfrak{R}[x]$ bzw. $\mathfrak{K}[x]$ der Polynomring in einer Unbestimmten $x$ über $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{K}$, und es mögen durchweg $\varkappa(x)$, $\varrho(x), \ldots$ beliebige Polynome aus $\mathfrak{K}[x]$, dagegen $p(x), q(x), \ldots$ ausschließlich Polynome aus $\mathfrak{R}[x]$ bedeuten. Ist

$$\varrho(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0,$$

so wird $\mathfrak{a} = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0)$ als das *Koeffizientenideal* von $\varrho(x)$, die durch $\mathfrak{a}$ bestimmte Idealklasse $K$ als die *Koeffizientenklasse* von $\varrho(x)$ bezeichnet. Das Primitivideal $\mathfrak{q}_K$ von $K$ ist ersichtlich das kleinste Ideal, das die sämtlichen Koeffizienten aller zu $\varrho(x)$ proportionalen Polynome $r(x) = \gamma\varrho(x)$ enthält; nach Satz 1 haben wir $\mathfrak{q}_K = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$.

---

[3]) Vgl. *van der Waerden*, a. a. O. [1]), § 103.

[4]) Da zu den Eigenschaften eines Ideals $\mathfrak{a}$ gehört, daß $\alpha \cdot \mathfrak{a}$ ganz wird für ein passendes $\alpha \neq 0$, ist das Primitivideal einer Klasse stets von (0) verschieden.

Ist $p(x)$ beliebig aus $\mathfrak{R}[x]$, so verstehen wir unter dem *Quasihauptideal* $\{p(x)\}$ das Ideal $\big((p(x))\mathfrak{K}[x]\big)\cap\mathfrak{R}[x]$, also das $\mathfrak{R}[x]$-Ideal aller der Polynome $q(x)$, die in $\mathfrak{K}[x]$ durch $p(x)$ teilbar sind, $q(x)=\varrho(x)\,p(x)$; das Polynom $p(x)$ [und ebenso jedes zu $p(x)$ proportionale Polynom $p_1(x)=\gamma\,p(x)$] heißt ein *Quasibasiselement* von $\{p(x)\}$[5]. Offenbar gelten die Sätze:

Das Quasihauptideal $\{p(x)\}$ ist dann und nur dann ein Primideal bzw. primitiv, wenn $p(x)$ in $\mathfrak{K}[x]$ irreduzibel bzw. eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist. Jedes Quasihauptideal läßt sich eindeutig als Durchschnitt von irreduziblen Quasihauptidealen darstellen.

Indessen sind diese Sätze für unsere weiteren Betrachtungen unwesentlich.

Unter dem Koeffizientenideal eines Quasihauptideals $\{p(x)\}$ möge das ganze $\mathfrak{R}$-Ideal aller $\mathfrak{R}$-Elemente verstanden werden, die als Koeffizienten von zu $\{p(x)\}$ gehörigen Polynomen auftreten. Dann hat man allgemein:

**Satz 2.** *Das Koeffizientenideal* $\mathfrak{c}$ *von* $\{p(x)\}$ *ist ein Oberideal des Primitivideals* $\mathfrak{q}_K$ *der Koeffizientenklasse von* $p(x)$, *und zwar unter Umständen ein echtes Oberideal.*

$\mathfrak{c}\supseteqq\mathfrak{q}_K$ folgt sofort aus der Tatsache, daß in $\{p(x)\}$ gleichzeitig mit $p(x)$ auch jedes Polynom $p_1(x)=\gamma\,p(x)$ vorkommt. Daß $\mathfrak{c}\supset\mathfrak{q}_K$ werden kann, möge hier nicht durch Angabe eines Einzelbeispiels, sondern durch eine (allerdings nur skizzierte) grundsätzliche Überlegung bewiesen werden[6]: Es sei $\mathfrak{R}$ ein Integritätsbereich mit Maximalbedingung, der nur ein einziges Primideal $\mathfrak{p}=(a_n,\ldots,a_0)$ enthält, das aber *kein Hauptideal* ist. Dann ist sicher $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$ das Klassenideal von $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$; andererseits kann $\mathfrak{p}$ nicht das Koeffizientenideal von $\{p(x)\}$ sein. Wäre dies nämlich der Fall, also $\{p(x)\}\subset\mathfrak{p}\mathfrak{K}[x]$, so wäre wegen des für Quasihauptideale gültigen Zerlegungssatzes auch $\{p^*(x)\}\subset\mathfrak{p}\mathfrak{R}[x]$ für mindestens ein $\{p(x)\}$ umfassendes Prim-Quasihauptideal $\{p^*(x)\}$; andererseits hätte man

$$\mathfrak{p}\mathfrak{R}[x]\subset\big(\mathfrak{p}+(x)\big)\mathfrak{R}[x]=(a_n,\ldots,a_0,x),$$

und es würde, wie leicht zu überlegen, $\mathfrak{p}\mathfrak{R}[x]$ das *einzige* Zwischenprimideal zwischen den beiden $\mathfrak{R}[x]$-Primidealen $\big(p^*(x)\big)$ und $(a_n,\ldots,a_0,x)$. Das widerspricht aber, wie unschwer zu zeigen, der für $\mathfrak{R}[x]$ ebenso wie für $\mathfrak{R}$ geltenden Maximalbedingung.

Um zu schärferen Ergebnissen zu kommen, beschränken wir uns von jetzt ab auf den Fall, daß $\mathfrak{R}$ eine *Hauptordnung* darstellt, d. h. in seinem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ *ganz abgeschlossen* ist. Unter dieser Voraussetzung gilt bekanntlich der *Kroneckersche Satz*[7]:

*Ist* $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, $\varrho(x)=\beta_mx^m+\cdots+\beta_0$ *und* $p(x)\varrho(x)=q(x)\in\mathfrak{R}[x]$, *so ist stets*

$$(\beta_m,\ldots,\beta_0)\subseteqq(a_n,\ldots,a_0)^{-1}.$$

Aus dem Kroneckerschen Satz ergibt sich zunächst durch Spezialisierung für $m=0$:

Ist $(a_n,\ldots,a_0)(\alpha)\subseteqq(a_n,\ldots,a_0)$, so ist $\alpha\in\mathfrak{R}$, aus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\subseteqq\mathfrak{a}$ folgt also stets $\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{R}$. D. h. wir haben im Falle einer Hauptordnung:

*Ein ganzes* $\mathfrak{R}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *mit endlicher Basis* $(a_n,\ldots,a_0)$ *ist dann und nur dann im Sinne unserer allgemeinen Definition primitiv, wenn* $\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{R}$ wird.

---

[5]) In früheren Veröffentlichungen habe ich das Wort *Quasihauptideal* gelegentlich in etwas anderem Sinne gebracht als hier im Text.

[6]) Der skizzierte Beweis soll in einer anderen Note in größerem Zusammenhang ausführlich dargestellt werden.

[7]) Die Bedeutung des Kroneckerschen Satzes, der hier etwas anders als üblich formuliert wird, ist scharf herausgearbeitet in der unter [1]) zitierten Abhandlung von *Prüfer*. Der einfachste Beweis stützt sich auf die Bewertungstheorie — vgl. Idealbericht Nr. 45.

Nennen wir weiter das Polynom $a_n x^n + \cdots + a_0$ *primitiv*, wenn sein Koeffizientenideal $\mathfrak{a}$ primitiv ist, so erhalten wir auf Grund von Satz 2:

**Satz 3.** *Bei einer Hauptordnung $\mathfrak{R}$ ist das Koeffizientenideal eines Quasihauptideals $\{p(x)\}$ stets gleich dem Primitivideal der Koeffizientenklasse von $\{p(x)\}$. — Es wird dann und nur dann $\{p(x)\}$ ein Hauptideal, $\{p(x)\} = (p^*(x))$, wenn $\{p(x)\}$ ein primitives Quasibasispolynom $p^*(x)$ enthält.*

Die erste Hälfte von Satz 3 bedarf bei der Fassung, die wir dem Kroneckerschen Satz gegeben haben, überhaupt keines Beweises. Was die zweite Hälfte angeht, so beachte man: Ist $\{p(x)\} = (p^*(x))$, $\mathfrak{a}$ das Koeffizientenideal von $p^*(x)$, so muß $\mathfrak{a}$ mit dem Primitivideal seiner Klasse zusammenfallen, weil jedes Quasibasispolynom $p(x)$ von $\{p(x)\}$ die Gestalt $p(x) = c\,p^*(x)$ $(c \in \mathfrak{R})$ besitzt. Ist andererseits $p^*(x)$ ein primitives Quasibasispolynom von $\{p(x)\}$, $\mathfrak{a}$ sein Koeffizientenideal, $q(x) = p^*(x)\varrho(x)$ ein beliebiges Polynom aus $\{p(x)\}$, so haben wir $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{R}$ und aus dem Kroneckerschen Satze ergibt sich

$$\varrho(x) = r(x) \in \mathfrak{R}[x], \quad q(x) \in (p^*(x)).$$

Aus dem Beweis des zweiten Teils von Satz 3 folgt insbesondere: Sind zwei primitive Polynome $p_1^*(x)$ und $p_2^*(x)$ proportional, $p_2^*(x) = \gamma\, p_1^*(x)$, so wird $(p_1^*(x)) = (p_2^*(x))$, es sind also $p_1^*(x)$ und $p_2^*(x)$ in $\mathfrak{R}[x]$ wechselseitig durcheinander teilbar und damit im Sinne der Teilbarkeitstheorie „nicht wesentlich", d. h. nur um einen Einheitsfaktor aus $\mathfrak{R}$ verschieden. Wichtiger als diese Bemerkung ist:

**Satz 4.** *Sind $p^*(x)$ und $q^*(x)$ primitiv, so ist auch $p(x)\,q(x)$ primitiv.*

Ist nämlich $t(x) = (p^*(x) q^*(x))\varrho(x)$, so folgt zunächst aus $t(x) = p^*(x) \cdot (q^*(x)\,\varrho(x))$ und der Primitivität von $p(x)$ notwendig:

$$s(x) = q^*(x)\,\varrho(x) \in \mathfrak{R}[x],$$

und aus der Primitivität von $q^*(x)$ ergibt sich weiter:

$$\varrho(x) = r(x) \in \mathfrak{R}[x].$$

D. h. aber, es wird $\{p^*(x) q^*(x)\} = (p^*(x)\,q^*(x))$ und damit $p^*(x)\,q^*(x)$ nach Satz 3 primitiv.

Man beachte, daß man Satz 4 nicht einfach auf Grund der Bemerkung:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{R}, \text{ falls } \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{R}$$

hätte beweisen können. Denn das Koeffizientenideal von $p^*(x)\,q^*(x)$ wird u. U. ein echtes Unterideal des Produktes der Koeffizientenideale von $p^*(x)$ und $q^*(x)$.

Satz 3 und Satz 4 zusammen zeigen, daß es jedenfalls bei einer beliebigen Hauptordnung $\mathfrak{R}$ durchaus sinnvoll ist, die Primitivität eines Polynoms $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ in der von uns gewählten Weise, also durch die Gleichung $(a_n, \ldots, a_0)^{-1} = \mathfrak{R}$ zu charakterisieren. Denn auch im Falle ganzzahliger Koeffizienten sind die wichtigsten Eigenschaften des Systems der in üblicher Bezeichnungsweise primitiven Polynome einerseits die multiplikative Abgeschlossenheit im Sinne von Satz 4, andererseits die Tatsache, daß jedes primitive Polynom $p^*(x)$ Hauptidealbasis des zugehörigen Quasihauptideals $\{p^*(x)\}$ ist.

Was die Frage angeht, wann ein beliebig vorgegebenes Quasihauptideal $\{p(x)\}$ ein primitives Quasibasispolynom $p^*(x)$ enthält und damit Hauptideal wird, so hat man das ziemlich triviale Kriterium:

**Satz 5.** *Das Quasihauptideal $\{p(x)\}$ enthält dann und nur dann ein primitives Quasibasispolynom $p^*(x)$, wenn die Koeffizienten $a_i$ von $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ einen größten gemeinsamen Teiler $t$ im üblichen Sinne des Wortes besitzen.*

Ist nämlich
$$p^*(x) = \gamma\, p(x) = b_n x^n + \cdots + b_0,$$
so ist $(b_n, \ldots, b_0)^{-1} = \mathfrak{R}$ wegen $(b_n, \ldots, b_0) = \gamma\,(a_n, \ldots, a_0)$ gleichwertig mit
$$\mathfrak{R} = \gamma^{-1} \cdot (a_n, \ldots, a_0)^{-1}; \quad (a_n, \ldots, a_0)^{-1} = (\gamma).$$

Die letzte Gleichung aber besagt einfach, daß $\gamma^{-1} = t$, das wegen $p(x) = t\,p^*(x)$ und $(a_n, \ldots, a_0)^{-1} = \mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, ein gemeinsamer Teiler aller $a_i$ ist, und daß jeder gemeinsame Teiler der $a_i$ auch $t$ teilt.

Nach Satz 5 werden dann und nur dann über der Hauptordnung $\mathfrak{R}$ alle Quasihauptideale $\{p(x)\}$ Hauptideale, wenn in $\mathfrak{R}$ endlich viele Elemente stets einen größten gemeinsamen Teiler haben.

Man beachte, daß aus der Tatsache, daß das Koeffizientenideal $\mathfrak{c}$ eines Quasihauptideals $\{p(x)\}$ primitiv ist, keine Schlüsse auf den Hauptidealcharakter von $\{p(x)\}$ gezogen werden können. Denn $\mathfrak{c}$ ist ja nur das Primitivideal der Koeffizientenklasse von $p(x)$, nicht das Koeffizientenideal eines zu $p(x)$ proportionalen Polynoms. Nur aus dem Umstand, daß $\mathfrak{c}$ gleich $\mathfrak{R}$ wird oder wenigstens in gewissen $\mathfrak{R}$-Primidealen $\mathfrak{p}$ nicht enthalten ist, lassen sich Folgerungen ableiten, die für unsere Betrachtungen von Interesse sind.

Ein Integritätsbereich $\mathfrak{S}$ möge *Stellenring* heißen, wenn er nur ein einziges maximales Primideal $\mathfrak{m}$ enthält, das dann alle Nichteinheiten aus $\mathfrak{S}$ umfaßt. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus dem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$, so bildet die Menge aller Quotienten $\frac{a}{c}$ $(a, c \in \mathfrak{R}, c \notin \mathfrak{p})$ einen Stellenring mit dem einzigen maximalen Primideal $\mathfrak{p}\,\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Die Ringe $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, deren Ideale in einfachem und wohlbekanntem Zusammenhange mit den Idealen von $\mathfrak{R}$ stehen, sollen die zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Stellenringe heißen[8]). Ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriger Stellenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann minimal, d. h. er enthält keinen anderen derartigen Stellenring als echten Teilbereich, wenn das Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ maximal ist, also (außer $\mathfrak{R}$) kein echtes ganzes Oberideal besitzt.

Ist $\mathfrak{R}$ eine Hauptordnung, so ist es auch jeder zugehörige Stellenring. Wir erhalten nun mühelos:

**Satz 6.** *Ist das Koeffizientenideal $\mathfrak{c}$ des Quasihauptideals $\{p(x)\}$ nicht in dem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ enthalten, so wird $\{p(x)\}$ zum Hauptideal, wenn man den Koeffizientenring $\mathfrak{R}$ durch den Koeffizientenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ersetzt.*

Denn es ist ja $\mathfrak{c}$ das kleinste Ideal, das die Koeffizienten aller Quasibasispolynome von $\{p(x)\}$ enthält, und wegen $\mathfrak{c} \notin \mathfrak{p}$ gibt es daher ein Quasibasispolynom
$$p^*(x) = a_n^* x^n + \cdots + a_0^*,$$
bei dem mindestens ein $a_{i_0}^*$ nicht in $\mathfrak{p}$ liegt. In $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ aber wird $a_{i_0}^*$ Einheit, d. h. $p^*(x)$ besitzt über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ das Koeffizientenideal $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und ist somit sicher über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ primitiv. Nach Satz 3 wird also $\{p(x)\} = \big(p^*(x)\big)$ über $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$.

Den wichtigsten Spezialfall von Satz 6 erfaßt:

**Satz 6a.** *Ist $\mathfrak{R}$ das Koeffizientenideal von $\{p(x)\}$, so wird $\{p(x)\}$ über allen zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ gehörigen Stellenringen zum Hauptideal.*

## § 2. Endliche diskrete Hauptordnungen.

Bei der Entwicklung der Theorie einer endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ geht man zweckmäßig nicht von der für $\mathfrak{R}$ geltenden Idealtheorie, sondern von einem passenden System von diskreten Bewertungen des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ aus. Noch rascher

[8]) Zu den Eigenschaften der zugehörigen Stellenringe, die üblicherweise auch *Primidealquotientenringe* genannt werden, vgl. etwa Idealbericht Nr. 7.

kommt man zur Formulierung der einschlägigen Fundamentalsätze, wenn man an Stelle des Bewertungs- den Divisorbegriff benutzt. Dieser kürzeste Aufbau der Theorie soll jetzt skizziert werden. Wir nehmen an, es sei neben dem Körper $\mathfrak{K}$ eine freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ gegeben, bei der die Menge der erzeugenden $P_\tau$ eine beliebige Mächtigkeit haben darf. Die Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen *Divisoren*, die Erzeugenden speziell *Primdivisoren*. Als *ganz* werden das Einheitselement $\mathcal{E}$ von $\mathfrak{A}$ bezeichnet, sowie alle die Divisoren $A$, bei denen in der (eindeutig bestimmten!) Darstellung

$$A = P_{\tau_1}^{\varrho_1} P_{\tau_2}^{\varrho_2} \cdots P_{\tau_n}^{\varrho_n}$$

durch die Primdivisoren $P_\tau$ alle Exponenten $\varrho_j$ positiv sind. Die Teilbarkeit eines Divisors durch einen anderen, der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier (nicht notwendig ganzer) Divisoren werden genau so definiert, wie wenn wir speziell die multiplikative Gruppe der positiven rationalen Zahlen mit den positiven Primzahlen als Erzeugenden vor uns hätten. Wir setzen nun voraus, es existiere ein fester *Endomorphismus $E$ der multiplikativen Gruppe aller von* 0 *verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{K}$ in die Gruppe $\mathfrak{A}$*, der den folgenden Bedingungen genügt[9]:

1. *Sind die Elemente $a_1$, $a_2$* (d. h. ihre Bilddivisoren $A_1$, $A_2$) *beide durch den Divisor $T$ teilbar, so ist auch $a_1+a_2$* (also der Bilddivisor $B$ von $a_1+a_2$) *durch $T$ teilbar.*

Um in 1. die Möglichkeit $a_1+a_2=0$ nicht ausschließen zu müssen, setzen wir fest, daß das Nullelement von $\mathfrak{K}$ als durch jeden Divisor teilbar angesehen werden soll.

2. *Zu verschiedenen Primdivisoren $P$, $P'$ gibt es in $\mathfrak{K}$ stets ein $c$, das zwar durch $P$, aber weder durch $P^2$ noch durch $P'$ teilbar ist.*

Aus 2. folgert man leicht: Sind die Divisoren $B_1, \ldots, B_n$ echte Vielfache des Divisors $A$, so existiert stets ein $c \in \mathfrak{K}$, das durch $A$, aber durch kein $B_i$ teilbar ist[10].

Die Körperelemente mit ganzen Bilddivisoren (also die durch den Einheitsdivisor $\mathcal{E}$ teilbaren $a$) sollen selbst *ganz* heißen. Aus 1. ergibt sich dann, daß die Menge aller ganzen Elemente (einschließlich 0) einen Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ bildet, und 2. zeigt darüber hinaus, daß $\mathfrak{K}$ seinerseits der Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$ wird. $\mathfrak{R}$ ist nichts anderes als die zu dem Endomorphismus $E$ gehörige [und rückwärts ihrerseits $E$ eindeutig bestimmende — vgl.[9]] endliche diskrete Hauptordnung.

Weiter sieht man sofort, daß die Menge aller $a \in \mathfrak{K}$, die durch einen festen Divisor $A$ teilbar sind, ein $\mathfrak{R}$-Ideal darstellt, das dann und nur dann ganz, also Untermenge von $\mathfrak{R}$, wird, wenn $A$ ganz ist. $\mathfrak{a}$ heißt *das zu $A$ gehörige Divisorideal.* Die Folgerung aus Grundvoraussetzung 2. zeigt, daß zu zwei verschiedenen Divisoren $A$, $C$ stets verschiedene Divisorideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ gehören. Man überzeugt sich mühelos, daß jedenfalls *alle $\mathfrak{R}$-Hauptideale Divisorideale* sind. Ist ferner die Summe zweier beliebiger Divisorideale stets selbst wieder

[9]) Bei der üblichen idealtheoretischen Begründung der Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen kommt es vor allem darauf an, aus geeigneten Voraussetzungen zunächst den Z.P.I. für $v$-Ideale zu beweisen (vgl. [1])). Aus dem Z.P.I. seinerseits folgt dann leicht die Existenz eines Endomorphismus $E$ der von uns gewünschten Art. Die Auffassung, daß der Endomorphismus $E$ das Wesentliche, der Z.P.I. nur Mittel zum Zweck ist, entspricht dem Standpunkt der Hasseschen Zahlentheorie (vgl. [2])) — und im übrigen im wesentlichen auch dem der Bewertungstheorie.

[10]) Ganz einfache Überlegungen, die am besten zunächst für ganze Divisoren durchgeführt, dann auf beliebige übertragen werden. Im Sinne der Hasseschen Zahlentheorie ist Voraussetzung 2. die *Unabhängigkeitsbedingung*, die wir dem Endomorphismus $E$ auferlegen müssen. — Der bewertungstheoretische Aufbau zeigt, daß es in gewisser Hinsicht ausreichen würde, an Stelle von 2. die wesentlich schwächere Forderung zu setzen, daß die Menge aller $a \in \mathfrak{K}$ mit ganzen Bilddivisoren einen Ring $\mathfrak{R}$ bildet, der $\mathfrak{K}$ selbst zum Quotientenkörper besitzt. — Man kommt dann nämlich, kurz gesagt, ohne an dem Ring $\mathfrak{R}$ etwas zu ändern, durch Weglassung einer bestimmten Teilmenge aller ursprünglich gegebenen Primdivisoren von dem ursprünglichen Endomorphismus $E$ zu einem neuen Endomorphismus $E^*$, der sowohl 1. wie der scharfen Bedingung 2. genügt. Vgl. *W. Krull*, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen, Math. Annalen **105** (1931), 1—14.

ein Divisorideal, so werden überhaupt alle $\mathfrak{R}$-Ideale Divisorideale, und man hat in $\mathfrak{R}$ einen *Noetherschen Fünf-Axiome-Ring*, also einen Ring vom Typus der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers (mit eindeutiger Primidealzerlegung *aller* Ideale) vor sich[11]). Dieser Spezialfall ist weiterhin für uns uninteressant.

Was die Multiplikation der Divisorideale angeht, so sieht man sofort:

Sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ die zu $A_1$, $A_2$ gehörigen Divisorideale, und bedeutet $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{d}$ dasjenige Divisorideal, das dem Produkte $A_1 \cdot A_2$ bzw. dem größten gemeinsamen Teiler $T$ von $A_1$ und $A_2$ zugeordnet ist, so hat man $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \subseteqq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \subseteqq \mathfrak{d}$, und zwar wird $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{d}$ das kleinste Divisorideal, das $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ bzw. $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ enthält. Es wird also dann und nur dann $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{d}$, wenn $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ bzw. $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ selbst ein Divisorideal ist.

Im allgemeinen braucht $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ kein Divisorideal zu sein; doch zeigt man wenigstens mühelos:

*Ist $(a)$ ein $\mathfrak{R}$-Hauptideal, $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Divisorideal, so ist stets auch $(a) \cdot \mathfrak{a}$ ein Divisorideal*[12]).

Diese Bemerkung ist vor allem deshalb wichtig, weil aus ihr sofort folgt, daß eine $\mathfrak{R}$-Idealklasse im Sinne von § 1, die ein Divisorideal enthält, ausschließlich aus Divisoridealen bestehen muß. Die eingeführte allgemeine Klasseneinteilung zerlegt also insbesondere die Menge aller Divisorideale in *Divisoridealklassen*.

Nennen wir weiter $T$ den *Divisorteiler* des beliebigen $\mathfrak{R}$-Ideals $\mathfrak{a}$, wenn $T$ der größte gemeinsame Teiler der sämtlichen, den Elementen von $\mathfrak{a}$ zugeordneten Bilddivisoren ist[13]), so ergibt sich aus der Art, wie $\mathfrak{R}$ mit Hilfe des Endomorphismus $E$ eingeführt wurde, leicht weiter:

*Für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}^{-1}$ ein Divisorideal, und zwar gehört $\mathfrak{a}^{-1}$ zu $T^{-1}$, falls $T$ den Divisorteiler von $\mathfrak{a}$ darstellt.*

Als Korollar zu diesem allgemeinen Resultat erhält man unter Berücksichtigung der Folgerung aus 2. insbesondere:

*Das $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann primitiv, $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{R}$, wenn $\mathcal{E}$ der Divisorteiler von $\mathfrak{a}$ ist.*

Schließlich ergibt sich, wenn wir noch die über die Multiplikation der Divisorideale gemachten Bemerkungen heranziehen:

*$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ hat stets den Divisorteiler $\mathcal{E}$, es ist also $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ immer primitiv*[14]).

Die Formel $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{R}$ hat abschließenden Charakter, wenn man sich ausschließlich für Divisorideale interessiert und dementsprechend verabredet, daß bei der Produkt- und Summenbildung von Divisoridealen das entstehende gewöhnliche Ideal stets durch das kleinste umfassende Divisorideal ersetzt werden soll — eine Konvention, die z. B. dann zweckmäßig ist, wenn es sich einzig um das Studium der Teilbarkeitsverhältnisse in $\mathfrak{R}$ handelt. Bei anderen Untersuchungen dagegen, z. B. bei der Betrachtung des Polynomringes $\mathfrak{R}[x]$, wird man dazu gedrängt, auch auf die zwischen den Nicht-Divisoridealen von $\mathfrak{R}$ bestehenden Beziehungen seine Aufmerksamkeit zu richten.

---

[11]) Hier zeigt sich am deutlichsten, wie nahe der auf den Divisorbegriff gegründete Aufbau der Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen durch das Vorbild der Hasseschen Zahlentheorie gelegt wird. Denn bei *Hasse* erscheint als *Fundamentalsatz der Idealtheorie* die Feststellung, daß bei den endlichen algebraischen Zahlkörpern die Ideale umkehrbar eindeutig den Divisoren entsprechen (S. 284), und in der Ausdrucksweise des Textes heißt das, daß alle Ideale Divisorideale sind, d. h. daß die Summe zweier Ideale stets wieder ein Divisorideal darstellt.

[12]) Dieser Satz ist für jede $'$-Idealbildung (nicht nur für die $v$-Ideale) fundamental — vgl. Idealbericht Nr. 48.

[13]) Der Divisorteiler $T$ ist also derjenige Divisor, der dem kleinsten $\mathfrak{a}$ umfassenden Divisorideal zugeordnet ist.

[14]) Die Formel $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{R}$ ist die Fundamentalformel der Artin-van der Waerdenschen Äquivalenztheorie der Ideale in vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereichen — vgl. *van der Waerden*, a. a. O.[1]).

Hier ist es zweckmäßig, die bisher zusammengestellten, wohlbekannten Bemerkungen noch etwas weiter auszubauen und anders zu interpretieren. Wir wollen kurz sagen, das beliebige $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ sei die Summe der (endlich oder unendlich vielen) Divisoren $A_\sigma$:

$$\mathfrak{a} = \sum_\sigma A_\sigma,$$

wenn $\mathfrak{a}$ im üblichen Sinne Summe der zu den $A_\sigma$ gehörigen Divisorideale $\mathfrak{a}_\sigma$ ist. In diesem Sinne ist eine Summendarstellung von $\mathfrak{a}$ durch *Hauptdivisoren* $H_\sigma$ [also durch Divisoren, deren zugehörige Ideale Hauptideale $(a_\sigma)$ sind] nichts anderes als eine Basisdarstellung von $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_\sigma, \ldots).$$

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt nun sofort:

**Satz 7.** *Ist $\mathfrak{a} = \sum_\sigma H_\sigma$ bzw. $\mathfrak{b} = \sum_\sigma H'_\sigma$ eine Summendarstellung von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ durch Hauptdivisoren, und bedeutet $T$ den größten gemeinsamen Teiler der Divisoren $H'_\sigma$, so wird*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \sum_\sigma H_\sigma T^{-1}$$

*eine Summendarstellung von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ durch Divisoren. — Insbesondere folgt aus $\mathfrak{a} = \sum_\sigma H_\sigma$ stets $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \sum_\sigma H_\sigma T^{-1}$, falls $T$ der größte gemeinsame Teiler aller $H_\sigma$ ist.*

Denn es ist ja $\mathfrak{b}^{-1}$ das zu $T$ gehörige Divisorideal; wir haben wegen der Distributivität der Idealmultiplikation $\mathfrak{a} = \sum_\sigma \big((a_\sigma)\mathfrak{b}^{-1}\big)$, falls $(a_\sigma)$ das $H_\sigma$ zugeordnete Hauptideal bedeutet, und nach unseren Feststellungen über die Multiplikation von Divisoridealen gehört das Divisorideal $(a_\sigma)\mathfrak{b}^{-1}$ jeweils zu $H_\sigma T^{-1}$.

Man beachte, daß sich Satz 7 nicht dadurch verallgemeinern läßt, daß man an Stelle der Darstellung $\mathfrak{a} = \sum_\sigma H_\sigma$ eine Summenzerlegung $\mathfrak{a} = \sum_\sigma A_\sigma$ in beliebige Divisoren setzt. Denn dann kann man nicht mehr behaupten, daß stets $\mathfrak{a}_\sigma\mathfrak{b}^{-1}$ ein Divisorideal werden muß, falls $\mathfrak{a}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{b}^{-1}$ das zu $A_\sigma$ bzw. $T$ gehörige Divisorideal bedeutet.

Satz 7, dessen Bedeutung im wesentlichen darauf beruht, daß er zeigt, wie weit das symbolische Rechnen mit Divisoren einschließlich der Summenbildung für die Untersuchung beliebiger $\mathfrak{R}$-Ideale nutzbar gemacht werden kann, soll jetzt mit den Begriffsbildungen von § 1 in Zusammenhang gebracht werden.

Es sei also $\mathfrak{R}[x]$ der Polynomring in einer Variablen $x$ über der endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}[x]$, $H_i$ der dem Element $a_i$ zugeordnete Hauptdivisor, $T$ der größte gemeinsame Teiler aller $H_i$. Ist $T$ Hauptdivisor, $(t)$ das zugehörige Hauptideal, und setzen wir

$$p^*(x) = t^{-1}\, p(x) = b_n x^n + \cdots + b_0,$$

so haben die den Hauptidealen $(b_i)$ entsprechenden Divisoren $H_i T^{-1}$ den größten gemeinsamen Teiler $\mathcal{E}$, und es wird daher nach einer früheren Bemerkung $(b_n, \ldots, b_0)^{-1} = \mathfrak{R}$; d. h. nach § 1, das Polynom $p^*(x)$ ist primitiv, und es wird das Quasihauptideal $\{p(x)\}$ Hauptideal, $\{p(x)\} = \big(p^*(x)\big)$. Im allgemeinen Fall, wenn kein reales primitives Polynom $p^*(x)$ existiert, kann man immer noch $p(x)$ ein *ideales Primitivpolynom* $p^*(x)$ mit Divisoren statt Elementen als Koeffizienten zuordnen, indem man formal setzt:

$$(1) \qquad p^*(x) = C_n x^n + \cdots + C_0 \quad (C_i = H_i\, T^{-1}).$$

Das durch (1) definierte $p^*(x)$ ändert sich ersichtlich nicht, wenn man statt von $p(x)$ von einem anderen Quasibasispolynom $p_1(x)$ von $\{p(x)\}$ ausgeht. Es ist also dem Quasihauptideal $\{p(x)\}$ eindeutig zugeordnet, wenn es auch seinerseits (anders als im Falle eines realen Primitivpolynoms) das Ideal $\{p(x)\}$ keineswegs eindeutig festlegt. Die Bedeutung von (1) zeigt

**Satz 8.** *Das als Divisorsumme in der Form $C_n + \cdots + C_0$ dargestellte Koeffizientenideal des zum Quasihauptideal $\{p(x)\}$ gehörigen idealen Primitivpolynoms $p^*(x)$ ist primitiv und gleich dem Koeffizientenideal von $\{p(x)\}$*[15]).

Daß $C_n + \cdots + C_0$ primitiv ist, folgt sofort aus der Tatsache, daß die $C_i$ den größten gemeinsamen Teiler $\mathcal{E}$ haben. Ferner wird $C_n + \cdots + C_0$ nach Satz 7 gleich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$, falls $\mathfrak{a} = (a_n, \ldots, a_0)$ das Koeffizientenideal von $p(x)$ bedeutet, und nach Satz 3 stellt $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ das Koeffizientenideal von $\{p(x)\}$ dar.

Man kann also mit Hilfe der Divisorsymbolik bei einem Quasihauptideal $\{p(x)\}$ über einer beliebigen endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ das Koeffizientenideal von $\{p(x)\}$ formal genau so bestimmen, wie im einfachsten Fall, wenn die Elemente von $\mathfrak{R}$ sich eindeutig in Primfaktoren zerlegen lassen: Man dividiert aus den Koeffizientendivisoren eines beliebigen Quasibasispolynoms $p(x)$ den größten gemeinsamen Teiler aus und bildet (in Gestalt einer Divisorsumme) das Koeffizientenideal des entstehenden idealen Primitivpolynoms.

Während die *Summe* zweier Divisorideale nur im trivialen Fall der Fünf-Axiome-Ringe stets wieder ein Divisorideal wird, zeigt das Beispiel einer beliebigen endlichen diskreten Hauptordnung mit eindeutiger Primfaktorzerlegung der Elemente, also einer Hauptordnung, bei der *alle* Divisorideale Hauptideale werden, daß auch andere Fälle existieren, in denen das *Produkt* zweier Divisorideale stets wieder ein Divisorideal darstellt. Wir wollen uns mit dieser Möglichkeit noch etwas näher beschäftigen.

**Satz 9.** *Ist das Produkt zweier Divisorideale stets selbst wieder ein Divisorideal, so erhält man für zwei in beliebiger Weise als Divisorsummen dargestellte Ideale $\mathfrak{a} = \sum_\sigma A_\sigma$, $\mathfrak{b} = \sum_\sigma B_\sigma$ die Formel*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \sum_\sigma A_\sigma T^{-1} \quad (T \text{ größter gemeinsamer Teiler aller } B_\sigma).$$

Der Beweis ergibt sich genau so wie bei Satz 7. Dort war ja, wie ausdrücklich hervorgehoben, die Beschränkung auf Summendarstellungen durch Hauptdivisoren $H_i$ nur nötig, um sicherzustellen, das man bei der distributiven Idealmultiplikation aus dem Bereich der Divisorideale nicht herauskam. Satz 9 zeigt, daß man in dem von uns betrachteten Sonderfall mit der Divisorsummensymbolik viel freier operieren kann als bei einer allgemeinen endlichen diskreten Hauptordnung. Man wird daher nach Kriterien fragen, die das Vorliegen unseres Sonderfalles sichern.

**Satz 10.** *Es ist dann und nur dann das Produkt zweier Divisorideale stets selbst wieder ein Divisorideal, wenn für jeden Primdivisor $P$ das zugehörige Divisorprimideal $\mathfrak{p}$ der Gleichung $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{R}$ genügt.*

Daß diese Bedingung notwendig ist, folgt aus unseren allgemeinen Bemerkungen über die Multiplikation von Divisoridealen, wenn man beachtet, daß $P$ wegen Grundvoraussetzung 2. der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von $\mathfrak{p}$ wird, so daß das Divisorideal $\mathfrak{p}^{-1}$ sicher zu $P^{-1}$ gehört. Um sie als hinreichend nachzuweisen, hat man nur zu zeigen, daß sich jedes Divisorideal als Produkt von positiven oder negativen Potenzen von Primdivisoridealen darstellen läßt. Das wiederum kann durch Induktionsschluß geschehen. Man setzt voraus, die Möglichkeit einer derartigen Darstellung sei bereits nachgewiesen für das zum Divisor $A$ gehörige Divisorideal $\mathfrak{a}$, und muß dann beweisen, daß bei einem beliebigen Primdivisor $P$ für das zu $A P^\varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ gehörige Divisorideal $\mathfrak{b}$

[15]) Einen Teil dieses Satzes, daß bei jedem Polynom aus $\{p(x)\}$ das Koeffizientenideal in $C_n + \cdots + C_0$ enthalten sein muß, habe ich früher als *Ergänzung des Kroneckerschen Satzes für endliche diskrete Hauptordnungen* bezeichnet. Vgl. Idealbericht Nr. 45.

die Gleichung $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}^e$ gilt, falls $\mathfrak{p}$ das durch $P$ bestimmte Divisorprimideal bedeutet. Nun hat man nach unseren grundsätzlichen Bemerkungen über die Multiplikation von Divisoridealen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}^e \subseteqq \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{c}=\mathfrak{b}\mathfrak{p}^{-e} \subseteqq \mathfrak{a}, \quad \text{also } \mathfrak{c}\mathfrak{p}^e \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{p}^e \subseteqq \mathfrak{b},$$

und aus

$$\mathfrak{c}\mathfrak{p}^e=(\mathfrak{b}\mathfrak{p}^{-e})\mathfrak{p}^e=\mathfrak{b}(\mathfrak{p}^{-e}\mathfrak{p}^e)=\mathfrak{b}\mathfrak{R}=\mathfrak{b}$$

folgt daher $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^e=\mathfrak{b}$, w. z. b. w.

Greifen wir weiter auf die in § 1 eingeführte Klasseneinteilung der Ideale zurück, wobei wir die oben bereits festgestellte Tatsache benutzen, daß die Divisorenideale unter sich in Klassen zerfallen, so erhalten wir weiter:

**Satz 11.** *Die Divisorideale der endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ bilden dann und nur dann eine Gruppe hinsichtlich der Multiplikation, wenn das Primitivideal jeder Klasse von Divisorenidealen gleich $\mathfrak{R}$ ist.*

Die Richtigkeit der Behauptung folgt unter Benutzung von Satz 10 sofort aus der Bemerkung, daß das Primitivideal der das Ideal $\mathfrak{a}$ enthaltenden Klasse $K$ gleich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ ist. Nach ihr bedeutet die Tatsache, daß das Primitivideal aller Divisorenklassen gleich $\mathfrak{R}$ wird, nichts anderes, als die Umkehrbarkeit *aller* Divisorenideale, insbesondere auch der Divisorenprimideale.

Um zu weiteren Aussagen zu kommen, ziehen wir den bereits am Schlusse von § 1 eingeführten Begriff des Stellenringes heran. Bei einem Stellenring $\mathfrak{R}$ ist jedes umkehrbare Ideal $\mathfrak{a}$ Hauptideal. Ist nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{R}$, so muß es ein $a \in \mathfrak{a}$ und ein $b \in \mathfrak{a}^{-1}$ geben, derart, daß $ab$ nicht in dem einzigen maximalen Primideal von $\mathfrak{R}$ liegt und somit in $\mathfrak{R}$ Einheit wird. D. h. aber, es muß für mindestens ein $a \in \mathfrak{a}$ das Element $a^{-1}$ in $\mathfrak{a}^{-1}$ liegen. Dann aber wird

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{a}(a^{-1})=\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}(a^{-1})=(a^{-1}), \quad \mathfrak{a}=(a^{-1})^{-1}=(a).$$

Weiter überzeugt man sich leicht, daß bei einer endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ die zugehörigen, den verschiedenen $\mathfrak{R}$-Primidealen $\mathfrak{q}$ entsprechenden Stellenringe $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ selbst endliche diskrete Hauptordnungen sind; die $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$-Divisorprimideale sind die Ideale $\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$, bei denen $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{q}$ enthaltenes Primideal aus $\mathfrak{R}$ darstellt[16]).

Aus diesen Bemerkungen folgt nun:

**Satz 12.** *Die Divisorideale der endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ bilden dann und nur dann eine multiplikative Gruppe, wenn für jedes $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{q}$ in dem zugehörigen Stellenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ alle Divisorideale Hauptideale sind.*

**Beweis.** a) Bilden die Divisorideale von $\mathfrak{R}$ eine multiplikative Gruppe, so wird insbesondere $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{R}$ für jedes Divisorprimideal $\mathfrak{p}$, und daraus folgt weiter

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})\cdot(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})=(\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})\cdot(\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})^{-1}=\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$$

für jedes $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$. Es sind also für jeden Stellenring alle Divisorprimideale und damit überhaupt alle Divisorideale umkehrbar und infolgedessen Hauptideale.

b) Bilden die Divisorideale von $\mathfrak{R}$ keine multiplikative Gruppe, so muß es angesichts von Satz 10 in $\mathfrak{R}$ mindestens ein Divisorprimideal $\mathfrak{p}$ geben, für das $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathfrak{R}$ wird. Dann existiert insbesondere ein (von $\mathfrak{R}$ verschiedenes!) Primoberideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$, das wegen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} \supset \mathfrak{p}\mathfrak{R}=\mathfrak{p}$ auch Oberideal von $\mathfrak{p}$ ist. Für das Divisorprimideal $\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ wird unter diesen Umständen

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})\cdot(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})=(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1})\cdot\mathfrak{R}_\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{q},$$

---

[16]) Folgt ohne Schwierigkeit aus der allgemeinen Theorie der Quotientenringe — vgl. [8]).

und da, wie sehr leicht einzusehen, für *jedes* $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}_\mathfrak{q})^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ gilt, bedeutet

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q}) \cdot (\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{R}_\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{q}$$

die Nichtumkehrbarkeit des Divisorprimideals $\mathfrak{p}\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$, das damit auch kein Hauptideal sein kann.

Satz 12 läßt sich noch verschärfen durch die Bemerkung, daß es genügt, unter den $\mathfrak{R}$-Primidealen $\mathfrak{q}$ nur die *maximalen* Primideale $\mathfrak{m}$ zu betrachten, die außer $\mathfrak{R}$ kein ganzes Oberideal besitzen. Denn zu jedem Ideal $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{R}$ gibt es ein maximales Primoberideal $\mathfrak{m}$, und wenn in $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$ alle Divisorideale Hauptideale sind, so gilt das gleiche für die Hauptordnungen $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$.

Um sich den Sinn der Sätze 11, 12 klarzumachen, betrachtet man zweckmäßig das Problem der endlichen algebraischen Erweiterung eines Körpers $\mathfrak{K}_0$, in dem eine endliche diskrete Hauptordnung $\mathfrak{R}_0$ ausgezeichnet ist, die die Divisoridealklassenzahl 1 besitzt, in der also alle Divisorideale Hauptideale sind, und infolgedessen alle Elemente eindeutig in Primfaktoren zerlegt werden können. (Der wichtigste Spezialfall wäre der, daß $\mathfrak{R}_0 = K[x_1, \ldots, x_n]$ einen Polynomring mit Körperkoeffizienten, $\mathfrak{K}_0$ den zugehörigen Quotientenkörper darstellt.) Ist $\mathfrak{K}$ der gegebene endliche algebraische Oberkörper von $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{R}$ der Ring aller von $\mathfrak{R}_0$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$, so ist auch $\mathfrak{R}$ eine endliche diskrete Hauptordnung, die aber im allgemeinen eine von 1 verschiedene Divisoridealklassenzahl haben wird. Die Sätze 11 und 12 zeigen nun: Die Vergrößerung der Anzahl der Divisoridealklassen bedeutet keine nennenswerte Schwierigkeit, solange nur jede Divisoridealklasse das Primitivideal $\mathfrak{R}$ besitzt. Denn dann kann man nicht nur die Divisorensymbolik, insbesondere das Rechnen mit Divisorensummen, verhältnismäßig weit treiben, man kann auch vor allem bei jeder Betrachtung, die sich auf eine *Einzelstelle*, d. h. ein bestimmtes $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{q}$ und seine Unterideale bezieht, durch Übergang zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ auf den Fall einer Hauptordnung mit Divisoridealklassenzahl 1 zurückkommen. Die Verhältnisse liegen also ähnlich einfach wie bei den Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper und bei solchen Untersuchungen, bei denen nicht nur Divisor-, sondern darüber hinaus beliebige ganze $\mathfrak{R}$-Ideale betrachtet werden müssen.

Ganz anders liegen die Dinge, sobald Divisoridealklassen mit von $\mathfrak{R}$ verschiedenem Primitivideal auftreten. In diesem Falle muß jedes $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{q}$, das das Primitivideal einer solchen Klasse enthält (und ebenso das Durchschnittsprimideal $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{R}_0$, falls wir uns speziell für den Aufbau von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{R}_0$ interessieren), als *kritisch* angesehen werden. Denn bei Betrachtungen, die sich auf die durch $\mathfrak{q}$ festgelegte Stelle beziehen, ist es nicht mehr möglich, durch den einfachen Übergang zum Quotientenring $\mathfrak{R}_\mathfrak{q}$ auf den bequemen Fall der Divisoridealklassenzahl 1 zurückzukommen. Mit dieser Feststellung aber sind wir auf eine neue, interessante Frage gestossen, auf die hier allerdings nur hingewiesen werden soll:

Lassen sich in dem von uns betrachteten Falle der endlichen algebraischen Erweiterung eines Körpers $\mathfrak{K}_0$ mit ausgezeichneter endlicher diskreter Hauptordnung $\mathfrak{R}_0$ der Divisoridealklassenzahl 1 Kriterien dafür aufstellen, daß ein bestimmtes Primideal $\mathfrak{q}_0$ aus $\mathfrak{R}_0$ hinsichtlich der gegebenen Erweiterung kritisch ist, daß also in der erweiterten Hauptordnung $\mathfrak{R}$ mindestens ein der Gleichung $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{q}_0$ genügendes Primideal $\mathfrak{q}$ existiert, das ein Primitivideal einer Divisoridealklasse von $\mathfrak{R}$ enthält?

---

Eingegangen 29. Juni 1950.

# Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne.

Von *Ernst Mohr* in Berlin.

## Einleitung, Fragestellung und Ergebnisse.

In dieser Arbeit handelt es sich darum, eine sogenannte Greensche Funktion im erweiterten Sinne, oft auch als verallgemeinerte Greensche Funktion bezeichnet, für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung zu konstruieren. Eine solche Konstruktion verdankt man W. W. Elliott[1]), der diese Aufgabe nahezu vollständig gelöst hat, bis auf die folgenden Punkte:

1. Die Erweiterung der Funktion[2]) kündigt sich bekanntlich darin an, daß sie nicht mehr einer homogenen, sondern einer inhomogenen Gleichung genügt, deren rechte Seite wir im Sinne von Courant-Hilbert[3]) als *Stützkraft* auffassen wollen. Für diese Stützkraft gibt Elliott einen Ausdruck an — bei ihm $N(x, y)$ genannt —, in den noch gewisse willkürliche Funktionen eingehen. Man sieht aber nicht, ob dadurch die allgemeinste Stützkraft gegeben ist. Wohl gibt Elliott an früherer Stelle an, wie aus einer derartigen Greenschen Funktion die allgemeinste sich ergibt; doch sieht man nicht, wie sich dies auf die Stützkraft auswirkt, wobei außerdem diese allgemeinste Greensche Funktion bei ihm im allgemeinen nicht mehr sämtliche Randbedingungen erfüllt.

2. Zur eindeutigen Festlegung der Greenschen Funktion bedarf es noch einer Normierung. Eine solche gibt Elliott an, wobei wieder die Frage offen bleibt, ob es noch andere Möglichkeiten dafür gibt.

3. Elliott setzt $n$ homogene Randbedingungen voraus, was mit sich bringt, daß bei ihm die gegebene Differentialgleichung und die ihr adjungierte denselben Index haben.

4. In Elliotts Stützkraft ist als Spezialfall die von Courant-Hilbert angegebene enthalten, die dort auf physikalischem Wege eingeführt und begründet wird. Es drängt sich die Frage auf, ob man diese spezielle Stützkraft einfach charakterisieren kann.

Die Elliottsche Arbeit in diesen Punkten zu ergänzen, ist das Ziel dieser Note. Die Antworten auf die unter 1. bis 4. aufgeworfenen Fragen lauten:

1. Elliotts Stützkraft ist bereits die allgemeinste derartige Kraft.

2. Es zeigt sich ein noch größerer Spielraum für mögliche Normierungen.

---

[1]) *W. W. Elliott*, Generalized Green's Functions for Compatible Differential Systems, Americ. Journal of Mathematics **50**, 1928, S. 243—258.

[2]) Man vergleiche auch das bekannte Werk von *E. Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, 3. Aufl. Akad. Verlagsgesellschaft Leipzig 1944, S. 191ff.

[3]) *Courant-Hilbert*, Methoden der Math. Physik I, Berlin. J. Springer 1931, 2. Aufl., S. 306—309.

3. Die Ausdehnung auf einen beliebigen Index läßt sich mühelos durchführen.

4. Die Courant-Hilbertsche Stützkraft ergibt sich, wenn man fordert, daß das Integral über ihr Quadrat ein Minimum sein soll.

Als ein Nebenresultat sei noch der Nachweis erwähnt, daß auch die sogenannten Grundlösungen bereits die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktionen besitzen, eine Eigenschaft, die, soweit mir bekannt, bislang noch nicht bemerkt worden ist.

Während Elliott die Aufgabe rein mathematisch angreift und nach einigen Zwischenstationen schließlich eine Funktion erhält, die allen Forderungen genügt, schlagen wir in gewissem Sinne den umgekehrten Weg ein: wir fassen die Aufgabe physikalisch auf, formulieren die Bedingungen, denen eine mögliche Stützkraft genügen muß, und gewinnen so die allgemeinste Lösung, aus der wir dann durch eine Minimumforderung die Hilbert-Courantsche als besonders einfach herausheben. Als nützlich erweist sich hierbei ein Lemma von Elliott, für das wir einen neuen Beweis geben. Die erweiterte Greensche Funktion ist mit einer Stützkraft verbunden, welche die adjungierte Differentialgleichung liefert; fällt die Stützkraft weg, so braucht man also auch die adjungierte Gleichung nicht, und die Konstruktion liefert dann die gewöhnliche Greensche Funktion. Aus diesem Grunde sprechen wir im folgenden kurz von der Greenschen Funktion.

## § 1. Vorbereitungen[4]).

1. In einem Intervall $a \leq s \leq b$ liege die homogene Randwertaufgabe vor:

$$L[u(s)] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(s)\, u^{(\nu)}(s) = 0, \quad f_n(s) \neq 0 \text{ in } \langle a, b \rangle \tag{1}$$

$$U_\mu[u(s)] \equiv \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \{\alpha_\mu^{(\varkappa)} u^{(\varkappa)}(a) + \beta_\mu^{(\varkappa)} u^{(\varkappa)}(b)\} = 0 \text{ für } \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

wo die $m$ Randbedingungen voneinander linear unabhängig sind; das bedeutet, daß die $2n$-spaltige Matrix der Koeffizienten $\alpha_\mu^{(\varkappa)}$, $\beta_\mu^{(\varkappa)}$ den Rang $m$ hat, speziell also $m \leq 2n$ ist. Wir schreiben kurz

$$L[u] = 0, \quad U_1[u] = 0, \ldots, \quad U_m[u] = 0. \tag{3}$$

Wo im folgenden eine Stützkraft nötig ist, brauchen wir den zu $L[u]$ adjungierten Operator $M[v]$ — wobei $f_\nu$ $\nu$-mal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird —, und es ist dann

$$\int_b^a ds\{vL[u] - uM[v]\} = N[u, v]\Big|_a^b \tag{4}$$

mit

$$M[v(s)] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \{f_\nu(s)\, v(s)\}^{(\nu)} \tag{5}$$

$$N[u, v] = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p+q=r} (-1)^p u^{(q)} \{f_{r+1} \cdot v\}^{(p)}; \tag{6}$$

$N[u, v]\Big|_a^b$ bedeutet den Sprung von $N[u, v]$ beim Übergang von $a$ nach $b$ und ist eine $2n$-reihige Bilinearform in

$$\begin{cases} u(a), u'(a), \ldots, u^{(n-1)}(a), u(b), u'(b), \ldots, u^{(n-1)}(b) \\ v(a), v'(a), \ldots, v^{(n-1)}(a), v(b), v'(b), \ldots, v^{(n-1)}(b) \end{cases} \tag{7}$$

mit der Determinante $(-1)^n \{f_n(a)\}^n \cdot \{f_n(b)\}^n \neq 0$, also nicht ausgeartet. Fassen wir jede Zeile in (7) als einen $u$- bzw. $v$-Vektor eines $2n$-dimensionalen Raumes auf, so definieren

[4]) Man vergleiche für das Folgende auch die Darstellung bei *E. L. Ince*, Ordinary Differential Equations, 1927, Kap. IX, S. 204ff.

die $m$ Bedingungen $U_1=0,\ldots, U_m=0$ ein $(2n-m)$-dimensionales Teilgebilde $\mathfrak{U}_{2n-m}$. Nennen wir weiter einen $u$- und einen $v$-Vektor aufeinander senkrecht, wenn für sie $N[u,v]|_a^b=0$ ist, so liefert das zu $\mathfrak{U}_{2n-m}$ senkrechte Teilgebilde $\mathfrak{V}_m$ von der Dimension $m$ die adjungierten Randbedingungen. Werden $U_1,\ldots, U_m$ durch $U_{m+1},\ldots, U_{2n}$ zu einem vollständigen Koordinatensystem für die $u$-Vektoren ergänzt, wodurch die Bilinearform in

$$N[u,v]|_a^b=U_1V_{2n}+\ldots+U_mV_{2n-m+1}+U_{m+1}V_{2n-m}+\cdots+U_{2n}V_1 \tag{8}$$

übergeht, so wird $\mathfrak{V}_m$ durch $V_{2n-m}=0,\ldots, V_1=0$ beschrieben, und die zu (3) adjungierte Randwertaufgabe lautet:

$$M[v]=0,\ V_{2n-m}[v]=0,\ldots, V_1[v]=0. \tag{9}$$

Es ist dann

$$\int_a^b ds\{vL[u]-uM[v]\}=U_1V_{2n}+\cdots+U_{2n}V_1. \tag{10}$$

Ist also $u$ eine Lösung von $L[u]=0$, $v$ eine Lösung von $M[v]=0$, so stehen die zugehörigen Vektoren aufeinander senkrecht. $k$ sei die Zahl der linear unabhängigen Lösungen von (3), der sogenannte Index von (3), analog $l$ der Index von (9), und $u_1,\ldots,u_k$ bzw. $v_1,\ldots,v_l$ seien die betreffenden Lösungen. Dann gelten die beiden Tatsachen:

1. Es ist

$$l=k+(m-n). \tag{11}$$

2. Die Aufgabe ($r(s)$ stetig)

$$L[u]=r(s),\ U_1[u]=\gamma_1,\ldots,U_m[u]=\gamma_m \tag{12}$$

(die $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ Konstante) ist genau dann lösbar, wenn

$$\int_a^b ds\,v_i(s)r(s)=\gamma_1V_{2n}[v_i]+\cdots+\gamma_mV_{2n-m+1}[v_i]\ \text{ für }\ i=1,2,\ldots,l. \tag{13}$$

Beide Behauptungen sieht man rasch und bequem ein, wenn man sich der obigen geometrischen Deutung bedient.

2. Wir fassen $u(s)$ auf als Elongation eines physikalischen "Systems" und suchen eine Lösung $g(s,t)$ von $L[u]=0$, welche einer an einer Stelle $t$ $(a<t<b)$ angreifenden Einzelkraft von der Intensität 1 entspricht, und zwar ohne Rücksicht auf die Randbedingungen. Als eine Lösung ergibt sich die bekannte „Grundlösung"

$$g(s,t)=\frac{\operatorname{sign}(t-s)}{2f_n(t)\cdot W_n(t)}\begin{vmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t)\\ u_1'(t) & \cdots & u_n'(t)\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ u_1^{(n-2)}(t) & \cdots & u_n^{(n-2)}(t)\\ u_1(s) & \cdots & u_n(s)\end{vmatrix}, \tag{14}$$

wo $u_1, u_2,\ldots,u_n$ ein Hauptsystem, $W_n(t)$ die zugehörige Wronskische Determinante bedeutet. $g(s,t)$ besitzt die folgenden vier Eigenschaften:

$\alpha$) $g(s,t)$ hat in jedem der Dreiecke $a\leq s\leq t\leq b$ und $a\leq t\leq s\leq b$ partielle Ableitungen nach $s$ bis zur $n$-ten Ordnung, und diese sind dort stetige Funktionen in $s, t$.

$\beta$) $g(s,t)$ genügt in jedem dieser Dreiecke als Funktion von $s$ der Differentialgleichung $L[g]=0$.

$\gamma$) $g(s,t)$ ist im ganzen abgeschlossenen Quadrat $a \leq \begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \leq b$ stetig und $(n-2)$-mal nach $s$ differenzierbar, und alle diese Ableitungen sind stetige Funktionen in $s$, $t$; speziell ist

$$g(t,t)=0,\ g'(t,t)=0,\ldots,g^{(n-2)}(t,t)=0, \tag{15}$$

die Ableitungen nach $s$ genommen.

$\delta$) Für $a<t<b$ ist

$$g^{(n-1)}(t+0,t)-g^{(n-1)}(t-0,t)=\frac{1}{f_n(t)}. \tag{16}$$

Für eine beliebige Störkraft $r(t)$ ergibt dann die Elongation

$$u(s)=\int_a^b dt\, g(s,t)\, r(t) \tag{17}$$

eine Lösung der Gleichung

$$L[u(s)]=r(s). \tag{18}$$

(14) schreiben wir kurz so:

$$g(s,t)=\operatorname{sign}(t-s)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, u_i(s). \tag{19}$$

Wir beachten noch: $g(s,t)$ hängt nicht von der Wahl des Hauptsystems ab; denn der Übergang zu einem neuen Hauptsystem vollzieht sich in (14) dadurch, daß Zähler und Nenner mit derselben Transformationsdeterminante $\neq 0$ multipliziert werden.

Kehren wir zu der kürzeren Schreibung (19) zurück, so bemerken wir, daß diese $c_i(t)$ in Abhängigkeit von $t$ gerade Lösungen der adjungierten Gleichung $M[v(t)]=0$ sind, und wieder ein Hauptsystem bilden [5]). Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man $c_\nu(t)=-\frac{1}{2}C'_\nu(t)$ setzt, und beachtet, daß dann die $C'_\nu(t)$ gerade jenes Gleichungssystem befriedigen, das sich ergibt, wenn man von der inhomogenen Gleichung $L[u(t)]=1$ nach der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$u(t)=C_1(t)\, u_1(t)+\cdots+C_n(t)\, u_n(t)$$

ein partikuläres Integral gewinnen will. Daß aber die Ableitungen $C'_1,\ldots,C'_n$ der adjungierten Gleichung genügen, hat schon Lagrange gezeigt, und es ist auch leicht zu sehen, daß sie ein Hauptsystem bilden. Schreiben wir daher $\tilde{v}_1(t),\ldots,\tilde{v}_n(t)$ für $c_1(t),\ldots,c_n(t)$, so ergibt eine einfache Überlegung, daß die zu $g(s,t)$ analoge Funktion $h(s,t)$ für $M[v]$ wie folgt aussieht:

$$h(s,t)=\operatorname{sign}(t-s)\sum_{i=1}^{n}\big(-u_i(t)\big)\tilde{v}_i(s). \tag{20}$$

Da aber auch $h(s,t)$ von der Wahl des Hauptsystems nicht abhängt, folgt, daß die Funktionen $g(s,t)$ und $h(s,t)$ die Symmetrieeigenschaft

$$h(s,t)=g(t,s) \tag{21}$$

besitzen.

**3.** Als eine Anwendung von Nr. 2 beweisen wir jetzt das im folgenden öfters benutzte Lemma von Elliott. $r(s)$ sei beliebig und stetig. Dann wird $L[u(s)]=r(s)$ von

$$u(s)=\int_a^b dt\, g(s,t)\, r(t)$$

[5]) Siehe *G. Kowalewski*, Große Mathematiker, 2. Aufl., I. F. Lehmann, München-Berlin 1939, S. 197—198.

gelöst. Ist andrerseits $v$ eine beliebige Lösung von $M[v]=0$, so ergibt (10)

$$\int_a^b ds\, v(s)\, L[u(s)] = U_1 V_{2n} + \cdots + U_{2n} V_1. \tag{22}$$

Es ist aber

$$U_\nu[u(s)] = U_\nu\left[\int_a^b dt\, g(s,t)\, r(t)\right] = \int_a^b dt\, r(t)\, U_\nu[g(s,t)],$$

da man bezüglich $s$ bis zur $(n-1)$-ten Stufe die Differentiation unter dem Integral ausführen darf. Somit ergibt (22), wenn man alles auf die linke Seite schafft:

$$\int_a^b dt\, r(t)\left\{v(t) - \sum_{\nu=1}^{2n} U_\nu[g(s,t)]\, V_{2n+1-\nu}[v(s)]\right\} = 0,$$

und da $r(t)$ beliebig ist, muß $\{\ldots\}$ verschwinden.

Dies liefert das gewünschte Lemma:

$$v(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} U_\nu[g(s,t)]\, V_{2n+1-\nu}[v(s)], \tag{23}$$

wo rechts die Randbedingungen in bezug auf $s$ zu nehmen sind.

## § 2. Notwendige Bedingungen für die Greensche Funktion.

4. Wir kehren zu der Aufgabe unter Nr. 2 zurück, suchen also wieder eine Lösung $G(s,t)$ von $L[u]=0$, welche der Wirkung einer Einzelkraft von der Intensität 1 in $t$ entspricht, verlangen aber nun, daß auch die Randbedingungen erfüllt sein sollen. Schon einfache Beispiele zeigen, daß diese Aufgabe unmöglich sein kann[6]): das betreffende System zeigt sich instabil gegenüber der Einzelkraft, und muß daher, damit es auf eine solche Kraft ansprechen kann, erst noch in geeigneter Weise durch eine stetig verteilte Gegenkraft gestützt werden. Entsprechend diesem Umstand versuchen wir also mittels einer geeigneten Stützkraft, die evtl. auch wegfallen kann, eine Lösung unserer Aufgabe, und verlangen von ihr, daß sie dieselben Dienste wie die gewöhnliche Greensche Funktion leisten, also die folgenden Eigenschaften besitzen soll:

I. Für eine beliebige stetige Störkraft $r(s)$ ist eine Lösung von

$$L[u(s)] = r(s),\quad U_1[u(s)] = 0, \ldots, U_m[u(s)] = 0 \tag{24}$$

in der Form

$$u(s) = \int_a^b dt\, G(s,t) r(t) \tag{25}$$

darstellbar. (24) ist nach (13) genau dann lösbar, wenn

$$\int_a^b ds\, v_i(s) r(s) = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, l. \tag{26}$$

II. $G(s,t)$ und die analoge Funktion $H(s,t)$ der adjungierten Randwertaufgabe besitzen die Symmetrieeigenschaft

$$H(s,t) = G(t,s). \tag{27}$$

III. Eine geeignete Normierung, durch welche $G(s,t)$ und ebenso $H(s,t)$ eindeutig werden.

Sei nun $P(s,t)$ die noch unbekannte Gegenkraft, mit der das System gestützt werden

[6]) Beispiele in dem unter [3]) zitierten Werk von *Courant-Hilbert*, S. 322.

muß, so hat $G(s,t)$ den Bedingungen

$$L[G(s,t)] = -P(s,t) \quad \begin{matrix} \text{in} & a \leq s < t \\ \text{bzw.} & t < s \leq b \end{matrix}, \quad a < t < b \tag{28}$$

$$G^{(n-1)}(t+0,t) - G^{(n-1)}(t-0,t) = \frac{1}{f_n(t)} \tag{29}$$

zu genügen, wo wie früher angenommen ist, daß $G(s,t)$ bezüglich $s$ in $<a, b>$ bis zur $(n-2)$-ten Stufe stetig differenzierbar ist, in jedem der angeschriebenen Teilintervalle bis zur $n$-ten Stufe.

Wirkt nun statt der Einzelkraft von der Intensität 1 die stetige Störkraft $r(t)$ auf das System ein, so denken wir uns diese mittels einer Einteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots . < t_{n-1} < t_n = b$$

durch die Wirkung von $n-1$ kleinen Einzelkräften in $t_1, \ldots, t_{n-1}$ beliebig approximiert, und haben dann für den $\lambda$-ten Punkt als Einzelkraft $r(t_\lambda)\Delta t_\lambda$. Wirkte statt dieser die Einzelkraft 1, so wäre die Stützkraft $-P(s,t_\lambda)$ nötig, und die Elongation betrüge $G(s,t_\lambda)$. Folglich ist jetzt die Stützkraft $-P(s,t_\lambda)\, r(t_\lambda)\Delta t_\lambda$ nötig und als Elongation ergibt sich $G(s, t_\lambda) r(t_\lambda)\Delta t_\lambda$. Summation über $\lambda$ von 1 bis $n-1$ ergibt:

$$\text{Stützkraft} = -\sum_{\lambda=1}^{n-1} P(s,t_\lambda)\, r(t_\lambda)\Delta t_\lambda,$$

$$\text{Elongation} = \sum_{\lambda=1}^{n-1} G(s,t_\lambda)\, r(t_\lambda)\Delta t_\lambda$$

und im Grenzübergang $n \to \infty$

$$\text{Stützkraft } \Pi(s) = -\int_a^b dt\, P(s,t)\, r(t), \tag{30}$$

$$\text{Elongation } u(s) = \int_a^b dt\, G(s,t)\, r(t) \tag{31}$$

Aus der letzten Beziehung folgt, zusammen mit (28):

$$L[u(s)] = r(s) - \int_a^b dt\, P(s,t)\, r(t) = r(s) + \Pi(s),$$

und es muß also, damit $L[u(s)] = r(s)$ herauskommt, gefordert werden, daß die für ein beliebiges und dann festes $s$ durch Akkumulation zustande kommende Stützkraft $\Pi(s)$ verschwindet. Dies liefert eine erste Bedingung, welcher die Stützkraft $P(s,t)$ genügen muß:

$$\int_a^b dt\, P(s,t)\, r(t) = 0 \tag{32}$$

für jedes stetige $r(t)$, für das

$$\int_a^b dt\, v_\nu(t)\, r(t) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, l), \tag{33}$$

das also orthogonal zu $v_1, \ldots, v_l$ ist.

Eine zweite Bedingung für $P(s,t)$ ergibt sich so: Setzen wir

$$G(s,t) = g(s,t) + \Gamma(s,t), \tag{34}$$

so ist die Wirkung der Einzelkraft bereits durch $g(s,t)$ vollständig berücksichtigt, und es entspricht $\Gamma(s,t)$ der Elongation einer stetigen Kraft, so daß $\Gamma(s,t)$ $n$-mal stetig dif-

ferenzierbar ist und den Bedingungen

$$(35)\qquad \begin{cases} L[\Gamma(s,t)] = -P(s,t), \\ U_1[\Gamma(s,t)] = -U_1[g(s,t)], \\ \quad\vdots \\ U_m[\Gamma(s,t)] = -U_m[g(s,t)]. \end{cases}$$

genügt.

Damit diese Aufgabe aber lösbar ist, ist nach Früherem notwendig und hinreichend, daß die $l$ Bedingungen

$$-\int_a^b ds\, v_\nu(s) P(s,t) = -\sum_{\lambda=1}^{m} U_\lambda[g(s,t)]\, V_{2n+1-\lambda}[v_\nu(s)] \text{ für } \nu = 1,\ldots,l$$

erfüllt sind oder, da $v_\nu$ ja den Bedingungen $V_{2n-m} = 0,\ldots, V_1 = 0$ genügt:

$$\int_a^b ds\, v_\nu(s) P(s,t) = \sum_{\lambda=1}^{2n} U_\lambda[g(s,t)]\, V_{2n+1-\lambda}[v_\nu(s)];\ \nu = 1,\ldots,l.$$

Die rechte Seite ist aber nach Elliotts Lemma (23) gerade $= v_\nu(t)$, und so ergibt sich als zweite Bedingung für $P(s,t)$:

$$(36)\qquad \int_a^b ds\, v_\nu(s) P(s,t) = v_\nu(t);\ \nu = 1,\ldots,l.$$

Dieselbe Betrachtung gilt für die adjungierte Randwertaufgabe: Auch das adjungierte physikalische System muß im allgemeinen mit einer Gegenkraft gestützt werden, die $Q(s,t)$ heiße, wo $Q(s,t)$ die zu (32) und (36) analogen Bedingungen erfüllen muß:

$$(37)\qquad \int_a^b dt\, Q(s,t) r(t) = 0$$

für jedes stetige $r(s)$, das orthogonal zu $u_1,\ldots,u_k$ ist, für das also

$$(38)\qquad \int_a^b ds\, u_\mu(s) r(s) = 0;$$

$$\mu = 1,\ldots,k.$$

$$(39)\qquad \int_a^b ds\, u_\mu(s) Q(s,t) = u_\mu(t);$$

**5.** Wir setzen von jetzt ab, was offenbar erlaubt ist, voraus, daß die Hauptsysteme $u_1,\ldots,u_n$ und $v_1,\ldots,v_n$ orthogonalisiert und normiert sind. Ein beliebiges $r(t)$, das zu $v_1,\ldots,v_l$ orthogonal ist, wird offenbar durch

$$(40)\qquad f(t) - \sum_{\nu=1}^{l} \left\{ \int_a^b d\sigma\, f(\sigma) v_\nu(\sigma) \right\} v_\nu(t)$$

gegeben, wo $f(t)$ beliebig stetig ist. Dann ergibt die Bedingung (32)

$$\int_a^b dt P(s,t) \left[ f(t) - \sum_{\nu=1}^{l} \left\{ \int_a^b d\sigma\, f(\sigma) v_\nu(\sigma) \right\} v_\nu(t) \right] = 0 \text{ in } a \leq s \leq b;$$

ein einzelner Term der Summe liefert

$$\left\{ \int_a^b dt P(s,t)\, v_\nu(t) \right\} \cdot \left\{ \int_a^b d\sigma f(\sigma) v_\nu(\sigma) \right\}$$

oder

$$\left\{ \int_a^b d\tau P(s,\tau) v_\nu(\tau) \right\} \cdot \left\{ \int_a^b dt\, f(t)\, v_\nu(t) \right\}.$$

Sammelt man unter dem Integralzeichen alles unter $dt f(t)$, so ergibt sich also

$$\int_a^b dt f(t) \left[ P(s,t) - \sum_{\nu=1}^{l} v_\nu(t) \cdot \left\{ \int_a^b d\tau P(s,\tau) v_\nu(\tau) \right\} \right] = 0,$$

und da hier $f(t)$ beliebig ist, so folgt ausführlich:

$$P(s,t) = \int_a^b d\tau P(s,\tau)[v_1(t)v_1(\tau) + \cdots + v_l(t)v_l(\tau)]. \tag{41}$$

Bei festem $s$ ist dies eine homogene lineare Integralgleichung zweiter Art mit einem Kern, der symmetrisch und ausgeartet ist. Daraus folgt nach geläufigen Schlüssen, daß

$$P(s,t) = \sum_{\nu=1}^{l} p_\nu(s) v_\nu(t) \tag{42}$$

bei beliebigen stetigen Funktionen $p_\nu(s)$ die allgemeinste Lösung ist.

Analog liefert die Bedingung (37) für die Stützkraft $Q(s,t)$ beim adjungierten System

$$Q(s,t) = \sum_{\mu=1}^{k} q_\mu(s) u_\mu(t) \tag{43}$$

mit beliebigen stetigen Funktionen $q_\mu(s)$.

Die Bedingung (36) ergibt jetzt

$$\int_a^b ds v_{\nu'}(s) \cdot \sum_{\nu=1}^{l} p_\nu(s) v_\nu(t) = v_{\nu'}(t) \quad \text{für } \nu' = 1, \ldots, l,$$

also

$$\int_a^b ds\, p_\nu(s) v_{\nu'}(s) = \delta_{\nu\nu'} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \nu' \\ 0 & \text{für } \nu \neq \nu', \end{cases} \tag{44}$$

in Worten: Die $p_1(s), \ldots, p_l(s)$ und $v_1(s), \ldots, v_l(s)$ müssen zueinander biorthogonal sein.

Ebenso liefert (39), daß die $q_1(s), \ldots, q_k(s)$ und $u_1(s), \ldots, u_k(s)$ zueinander biorthogonal sein müssen:

$$\int_a^b ds q_\mu(s) u_{\mu'}(s) = \delta_{\mu\mu'} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \mu' \\ 0 & \text{für } \mu \neq \mu'. \end{cases} \tag{45}$$

Sind umgekehrt die $p_1(s), \ldots, p_l(s)$ und $q_1(s), \ldots, q_k(s)$ in dieser Weise gewählt, so liefern (42) und (43) mögliche Stützkräfte mit den Eigenschaften (32), (36) bzw. (37), (39). Falls $G(s,t)$ existiert, ist dann die Forderung I erfüllt.

**6.** Wir wenden uns jetzt zur Symmetriebedingung II, die eng mit der Bedingung für die Eindeutigkeit III verknüpft sein wird. Seien $\sigma$, $\tau$ zwei verschiedene Stellen $\in (a,b)$, und etwa $\sigma < \tau$; sei weiter

$$u(s) = G(s,\sigma); \; v(s) = H(s,\tau), \tag{46}$$

so verlangt II, daß

$$u(\tau) = r(\sigma) \tag{47}$$

sein soll für alle solche Paare $(\sigma,\tau)$ (ebenso für $\sigma > \tau$). Wendet man auf $u$ und $v$ die Beziehung (4) an in bezug auf die drei Intervalle $a \ldots \sigma$, $\sigma \ldots \tau$, $\tau \ldots b$, so ergibt sich in leicht verständlicher Schreibung

$$\int_a^b ds\{vL[u] - uM[v]\} = N[u,v]\Big|_a^{\sigma-0} + N[u,v]\Big|_{\sigma+0}^{\tau-0} + N[u,v]\Big|_{\tau+0}^{b}. \tag{48}$$

Die rechte Seite ist gleich

$$N[u,v]\Big|_a^b - N[u,v]\Big|_{\sigma-0}^{\sigma+0} - N[u,v]\Big|_{\tau-0}^{\tau+0}. \tag{49}$$

Immer unter der Annahme, daß die Greenschen Funktionen $G(s,\sigma)$, $H(s,\tau)$ existieren und also die Randbedingungen erfüllen, ist der erste Term in (49) gleich Null. Für den zweiten ist von $N[u,v]$ nur maßgebend der in $\sigma$ unstetige Bestandteil

$$(vf_n)u^{(n-1)}\Big|_{\sigma-0}^{\sigma+0} = v(\sigma) f_n(\sigma) \frac{1}{f_n(\sigma)} = v(\sigma),$$

und analog beim dritten der in $\tau$ unstetige Bestandteil

$$(-1)^{(n-1)} f_n u v^{(n-1)}\Big|_{\tau-0}^{\tau+0} = (-1)^{(n-1)} f_n(\tau) u(\tau) \frac{1}{(-1)^n f_n(\tau)} = -u(\tau).$$

Somit ergibt sich für die rechte Seite von (48)

$$-v(\sigma) + u(\tau),$$

was laut unserer Forderung $=0$ sein soll. Also muß das Integral in (48) links Null sein, und dies ergibt wegen

$$L[u(s)] = -P(s,\sigma); \quad M[v(s)] = -Q(s,\tau)$$

die Bedingung

$$\int_a^b ds H(s,\tau) P(s,\sigma) = \int_a^b ds G(s,\sigma) Q(s,\tau), \tag{50}$$

oder wenn wir für $P$ und $Q$ ihre Ausdrücke eintragen:

$$\sum_{\nu=1}^{l} v_\nu(\sigma) \int_a^b ds H(s,\tau) p_\nu(s) = \sum_{\mu=1}^{k} u_\mu(\tau) \int_a^b ds G(s,\sigma) q_\mu(s) \tag{51}$$

oder in leicht verständlicher Abkürzung:

$$\sum_{\nu=1}^{l} v_\nu(\sigma) p_\nu^*(\tau) = \sum_{\mu=1}^{k} u_\mu(\tau) q_\mu^*(\sigma). \tag{52}$$

Multipliziert man links mit $v_\nu(\sigma)$ und integriert über $\sigma$, so folgt

$$p_{\nu'}^*(\tau) = \sum_{\mu=1}^{k} u_\mu(\tau) \int_a^b d\sigma q_\mu^*(\sigma) v_{\nu'}(\sigma) = \sum_{\mu=1}^{k} g_{\mu\nu'} u_\mu(\tau) \text{ für } \nu' = 1, \ldots, l \tag{53}$$

und analog

$$q_{\mu'}^*(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{l} v_\nu(\sigma) \int_a^b d\tau p_\nu^*(\tau) u_{\mu'}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{l} h_{\nu\mu'} v_\nu(\sigma) \text{ für } \mu' = 1, \ldots, k. \tag{54}$$

Alsdann lautet (52):

$$\sum_{\nu=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{k} g_{\mu\nu} u_\mu(\tau) v_\nu(\sigma) = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{l} h_{\nu\mu} v_\nu(\sigma) u_\mu(\tau). \tag{55}$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $u_{\mu'}(\tau) \cdot v_{\nu'}(\sigma)$ — wo $\mu', \nu'$ ein bestimmtes Zeigerpaar $\mu, \nu$ ist — und integriert über $\tau$ und $\sigma$, so ergibt sich

$$g_{\mu'\nu'} = h_{\nu'\mu'}. \tag{56}$$

So erhalten wir die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b ds H(s,\tau) p_\nu(s) &= \sum_{\mu=1}^{k} g_{\mu\nu} u_\mu(\tau); \quad \nu = 1, \ldots, l \\ \int_a^b ds G(s,\sigma) q_\mu(s) &= \sum_{\nu=1}^{l} h_{\nu\mu} v_\nu(\sigma); \quad \mu = 1, \ldots, k \end{aligned}\right\} \text{ mit } g_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}. \tag{57}$$

Nehmen wir umgekehrt eine beliebige Matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} g_{12} \cdots g_{1l} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ g_{k1} g_{k2} \cdots g_{kl} \end{pmatrix} \tag{58}$$

an, definieren $h_{\nu\mu}$ durch $h_{\nu\mu}=g_{\mu\nu}$ und fordern (57), so ist die Symmetriebedingung II erfüllt. Speziell kann $G$ die Nullmatrix sein.

Die Bedingungen (57) garantieren gleichzeitig die Eindeutigkeit von $G(s,t)$ bzw. $H(s,t)$, indem durch sie diese Funktionen normiert werden. In der Tat: Nachdem die $p_\nu(s)$ und $q_\mu(s)$ beliebig, aber so gewählt sind, daß (44) und (45) gelten, sind die Stützkräfte $P(s,t)$ und $Q(s,t)$ festgelegt. Ist weiter die Matrix $G$ beliebig und dann fest gewählt, so erscheinen $G(s,t)$ und $H(s,t)$ durch (57) eindeutig normiert. Denn angenommen, es gäbe z. B. zwei verschiedene Funktionen $G(s,t)$, $G^*(s,t)$, so wäre ihre Differenz $\gamma(s,t)$ eine $n$-mal stetig differenzierbare Funktion und genügte den Bedingungen

$$L[\gamma(s,t)]=0,\ U_1[\gamma(s,t)]=0,\ldots,U_m[\gamma(s,t)]=0,$$

d. h. $\gamma$ wäre von der Form

$$\gamma(s,t)=a_1(t)\,u_1(s)+\cdots+a_k(t)\,u_k(s).$$

Gemäß der Normierung (57) würde $\gamma(s,t)$ den $k$ Bedingungen

$$\int_a^b ds\,\gamma(s,t)\,q_\mu(s)=0 \text{ für } \mu=1,\ldots,k$$

genügen. Da aber die $q_\mu(s)$ und $u_{\mu'}(s)$ zueinander biorthogonal sind, folgt hieraus

$$a_\mu(t)=0 \text{ für } \mu=1,\ldots,k,$$

und also $\gamma(s,t)\equiv 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

## § 3. Die Konstruktion der Greenschen Funktion.

**7.** Bislang haben wir unter der Voraussetzung, daß die Greenschen Funktionen $G(s,t)$, $H(s,t)$ existieren, notwendige Bedingungen für sie abgeleitet. Jetzt zeigen wir, daß diese Bedingungen auch hinreichen, um diese Funktionen zu konstruieren.

Die $p_1(s),\ldots,p_l(s)$ werden biorthogonal zu $v_1(s),\ldots,v_l(s)$ gewählt, und sind sonst beliebig; analog die $q_1(s),\ldots,q_k(s)$ biorthogonal zu den $u_1(s),\ldots,u_k(s)$. Dann wird die Matrix $G$ beliebig gewählt, und dazu die Matrix $H$ durch Transponieren gebildet:

$$H=G^*.$$

An die Funktionen $G(s,t)$ bzw. $H(s,t)$ stellen wir die Symmetrie- und Normierungsbedingungen (57). Um dann z. B. $G(s,t)$ zu gewinnen, das den Bedingungen

$$(59)\qquad \begin{cases} L[G(s,t)]=-\sum\limits_{\nu=1}^{l} p_\nu(s)\,v_\nu(t) & \text{in } a\leq s<t \\ & \text{bzw. } t<s\leq b \\ U_1[G(s,t]=0,\ldots,U_m[G(s,t)]=0 & \\ G^{(n-1)}(t+0,t)-G^{(n-1)}(t-0,t)=\dfrac{1}{f_n(t)} & \text{in } a<t<b \end{cases}$$

mit den bekannten Differenzierbarkeitseigenschaften genügen soll, setzen wir wieder $G(s,t)=g(s,t)+\Gamma(s,t)$, und haben dann $\Gamma(s,t)$ als $n$-mal in $s$ stetig differenzierbare Funktion der folgenden Aufgabe zu konstruieren:

$$(60)\qquad \begin{cases} L[\Gamma(s,t)]=-\sum\limits_{\nu=1}^{l} p_\nu(s)\,v_\nu(t), & \begin{matrix} a\leq s\leq b \\ a<t<b \end{matrix} \\ U_1[\Gamma(s,t]=-U_1[g(s,t,] & \\ \vdots & \\ U_m[\Gamma(s,t)]=-U_m[g(s,t)]. & \end{cases}$$

Damit diese Aufgabe lösbar ist, muß nach (13) für $\nu'=1,\ldots,l$

$$\int_a^b ds\, v_{\nu'}(s)\left\{-\sum_{\nu=1}^{l} p_\nu(s)\, v_\nu(t)\right\} = \sum_{\mu=1}^{m}\{-U_\mu[g(s,t)]\, V_{2n+1-\mu}[v_{\nu'}(s)]\}$$

sein, was in der Tat der Fall ist: Denn die linke Seite ist infolge der Biorthogonalität der $p_\nu(s)$ und $v_{\nu'}(s)$ gleich $-v_{\nu'}(t)$; die rechte Seite, in der man die Summation über $m$ hinaus bis $2n$ erstrecken darf, ist nach Elliotts Lemma (23) aber ebenfalls $=-v_{\nu'}(t)$. Aus dem expliziten Ausdruck für $g(s,t)$ und den in Nr. 2 für $g(s,t)$ formulierten Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ folgt leicht, daß diese Konstruktion von $\Gamma(s,t)$ auch noch für $t=a$ und $t=b$ durchführbar ist und daß daher $G(s,t)$ die Eigenschaften $\alpha), \gamma), \delta)$ besitzt, ausgenommen natürlich (15), während an Stelle von $\beta)$ jetzt tritt:

$$L[G(s,t)] = -P(s,t) \text{ in jedem der Dreiecke } \begin{matrix} a \leq s \leq t \leq b \\ a \leq t \leq s \leq b. \end{matrix}$$

Analog gewinnt man $H(s,t)$. Diese $G(s,t)$, $H(s,t)$ sind wegen (57) eindeutig und genügen der Symmetriebedingung $H(s,t)=G(t,s)$. Ferner ergibt sich ähnlich wie unter Nr. 2, daß

$$u(s) = \int_a^b dt\, G(s,t)\, r(t) \quad \text{mit} \quad \int_a^b dt\, r(t)\, v_\nu(t) = 0;\ \nu=1,\ldots,l \tag{61}$$

den Bedingungen

$$\begin{cases} L[u(s)] = r(s),\ U_1[u(s)] = 0,\ldots, U_m[u(s)] = 0 \\ \int_a^b ds\, u(s)\, q_\mu(s) = 0 \text{ für } \mu=1,\ldots,k \end{cases} \tag{62}$$

genügt, letzteres als Folge von (57) und (61). Ist umgekehrt $\tilde{u}(s)$ eine Lösung von (62), was voraussetzt, daß $r(s)$ orthogonal zu $v_1,\ldots,v_l$ ist, so ist, da auch das $u(s)$ von (61) eine Lösung ist, die Differenz $u(s)-\tilde{u}(s)=\delta(s)$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$L[\delta(s)] = 0,\ U_1[\delta(s)] = 0,\ldots, U_m[\delta(s)] = 0 \tag{63}$$

$$\int_a^b ds\, \delta(s)\, q_\mu(s) = 0 \text{ für } \mu=1,\ldots,k. \tag{64}$$

Aus (63) folgt

$$\delta(s) = a_1 u_1(s) + \cdots + a_k u_k(s);$$

(64) ergibt dann wegen (45), daß

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0, \text{ also } \tilde{u}(s) = u(s)$$

ist. Jede Lösung von (62) ist also in der Form (61) darstellbar.

8. Wir wollen noch einen Spezialfall hervorheben. Sei der Index $k=0$. Wenn dann $m=n$ ist, so ist nach (11) auch $l=0$, und die adjungierte Differentialgleichung braucht, da die Stützkraft wegfällt, nicht herangezogen zu werden. $G(s,t)$ ist dann die gewöhnliche Greensche Funktion für $L[u]$. Ist aber $m>n$, so ist $l=m-n>0$; jetzt brauchen wir — obwohl also der Index 0 ist! — eine Stützkraft, die uns die adjungierte Gleichung liefert, und $f_\nu(s)$ muß demnach $\nu$-mal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden. Unsere Konstruktion liefert dann die erweiterte Greensche Funktion $G(s,t)$, welche alle $m$ Randbedingungen erfüllt, wogegen die gewöhnliche Greensche Funktion nur $n$ von diesen Randbedingungen erfüllen könnte. Umgekehrt kommt man für die adjungierte Aufgabe, obwohl der Index $l>0$ ist, ohne Stützkraft aus, da ja $k=0$ ist.

## § 4. Die Stützkraft von Courant-Hilbert.

**9.** Eine spezielle und von Courant-Hilbert gebrauchte Stützkraft ergibt sich durch die Spezialisierung

$$p_\nu(s) = v_\nu(s) \text{ für } \nu = 1, \ldots, l, \tag{65}$$

wodurch ja (44) offensichtlich erfüllt ist; die Stützkraft lautet dann

$$P^*(s,t) = \sum_{\nu=1}^{l} v_\nu(s) v_\nu(t). \tag{66}$$

Die Frage liegt nahe, wodurch diese Stützkraft sich auszeichnet. Die Antwort ist leicht zu geben. Wir berechnen zu diesem Zwecke das Integral

$$\int_a^b ds \{P(s,t) - P^*(s,t)\}^2 = \int_a^b ds \left\{P(s,t) - \sum_{\nu=1}^{l} v_\nu(s)\, v_\nu(t)\right\}^2 \tag{67}$$

und erhalten, wenn wir (36) beachten:

$$\int_a^b ds P^2(s,t) - [v_1^2(t) + \cdots + v_l^2(t)] = \int_a^b ds P^2(s,t) - \int_a^b ds P^{*2}(s,t). \tag{68}$$

Da (67) stets $\geq 0$ ist und $= 0$ genau für $P(s,t) = P^*(s,t)$, so zeigt (68), daß stets

$$\int_a^b ds P^2(s,t) \geq \int_a^b ds P^{*2}(s,t) \tag{69}$$

und $=$ genau dann gilt, wenn $P(s,t) = P^*(s,t)$. In Worten: Verlangt man, daß für die zur Stützung der in $t$ angreifenden Einzelkraft 1 nötigen Gegenkraft $P(s,t)$ das Integral $\int_a^b ds P^2(s,t)$ ein Minimum sein soll, so ergibt sich gerade die Courant-Hilbertsche Stützkraft $P^*(s,t)$. Jede andere Stützkraft kann in der Form

$$P(s,t) = P^*(s,t) + \sum_{\nu=1}^{l} \pi_\nu(s)\, v_\nu(t) \tag{70}$$

dargestellt werden, wo die $\pi_\nu(s)$ zu allen $v_\nu(s)$ orthogonal sind ($\nu = 1, \ldots, l$), und liefert dann einen größeren Wert für jenes Integral:

$$\int_a^b ds P^2(s,t) = \int_a^b ds P^{*2}(s,t) + \sum_{\nu=1}^{l} v_\nu^2(t) \int_a^b ds \pi_\nu^2(s). \tag{71}$$

---

Eingegangen am 21. November 1949

# Über die Eigenlösungen gewisser Integralgleichungen der Potentialtheorie.

Von *K. Jaeckel* in Hannover.

## I. Problemstellung.

Die Behandlung ebener potentialtheoretischer Probleme wird im allgemeinen übersichtlicher, wenn man die Eigenfunktionen der folgenden Integralgleichungen heranzieht:

$$\text{(a)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - x| d\xi = \lambda \varphi(x),$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \ln|\xi - x| d\xi = \lambda \varphi(x).$$

Neben der Möglichkeit, diese Eigenfunktionen mit Hilfe einer Bilinearentwicklung des Kernes zu ermitteln [1] [2] [3], kann man sie auch über ihre Differentialgleichung bestimmen, die man bei Verwendung eines zum Kern symmetrischen Differentialoperators leicht finden kann. Diese Methode läßt sich auf die verallgemeinerten räumlichen Probleme übertragen.

## II. Ermittlung der zugehörigen Differentialgleichungen und Randbedingungen für die ebenen Probleme (a) und (b).

Für das ebene Problem (a) stellen wir uns

$$\text{(1)} \qquad \Phi(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - x| d\xi$$

als Potential einer Streckenbelegung zwischen $x = -1$ und $x = +1$ vor in Aufpunkten, die auf der $x$-Achse selbst liegen.

Betrachten wir zunächst Aufpunkte $X$ außerhalb der Belegung:

$$\Phi(X) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - X| d\xi$$

---

[1]) *G. Hamel*, Integralgleichungen. Berlin 1937. S. 95.

[2]) *W. Schmeidler*, Lineare Integralgleichungen. Leipzig 1950, S. 67.

[3]) *K. Jaeckel*, Ermittlung einer Reihendarstellung des Kernes $\ln r$ in elliptischen Koordinaten, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 184.

und wenden den Operator

$$D_X = -\sqrt{X^2-1}\,\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{X^2-1}\,\frac{\partial}{\partial X}\right) = -X\frac{\partial}{\partial X} + (1-X^2)\frac{\partial^2}{\partial X^2}$$

an, den wir wegen des stetigen Integranden unter das Integralzeichen ziehen können, und berücksichtigen mit

$$(2) \qquad D_\xi = \sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = -\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + (1-\xi^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

die Identität

$$(D_X - D_\xi)\ln|\xi - X| \equiv 0,$$

so ergibt sich

$$D_X\Phi(X) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, D_\xi \ln|\xi - X|\, d\xi.$$

Nach Teilintegration finden wir, indem wir zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion $\varphi(\xi)$ voraussetzen:

$$(3) \qquad D_X\Phi(X) = \int_{-1}^{+1} \frac{D_\xi\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - X|\, d\xi + \left[\frac{\varphi(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - X} - \varphi'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\,\ln|\xi - X|\right]_{-1}^{+1}.$$

Nun betrachten wir solche Belegungsfunktionen $\varphi(\xi)$, die der Differentialgleichung

$$(4) \qquad D_\xi\varphi(\xi) + \mu^2\varphi(\xi) = 0, \quad |\xi| \leq 1,$$

genügen mit der Forderung, daß $\varphi$ und $\varphi'$ im Intervall einschließlich der Endpunkte beschränkt, also Polynome sind. Dann ergibt sich

$$D_X\Phi(X) = -\mu^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - X|\, d\xi,$$

wodurch der links stehende Differentialausdruck auch für innere Punkte definiert werden kann. Durch die Differentialgleichung

$$D_x\Phi(x) + \mu^2\Phi(x) = 0, \quad |x| \leq 1,$$

wird damit eine Funktion $\Phi(x)$ auch im Innern erklärt, wobei $D_x$ der Gleichung (2) entsprechend gebildet ist.

Wir können nun aus (1) nachweisen, daß $\Phi$ und $\Phi'$ mit den Lösungspolynomen von (4) im Intervall $\langle -1, +1\rangle$ beschränkt bleiben, so daß $\Phi$ und $\varphi$ derselben Differentialgleichung mit gleichen Randbedingungen genügen. Daraus folgt, daß

$$\Phi(x) = \lambda\varphi(x)$$

ist und damit, wegen der Eindeutigkeit des Potentials, daß die Lösungen der Differentialgleichung (4) die Eigenlösungen der Integralgleichung (a) darstellen.

Für den Nachweis der Beschränktheit von $\Phi$ und $\Phi'$ schreiben wir das Lösungspolynom von (4) in der Form

$$(5) \qquad \varphi_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,\frac{(\xi - x)^\nu}{\nu!},$$

$a_\nu(x)$ vom Grade $n-\nu$, und erhalten

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - x|\, d\xi = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) \int_{-1}^{+1} \frac{(\xi - x)^\nu}{\nu!} \ln|\xi - x|\, \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Beachten wir nun, daß mit einer von $\nu$ abhängigen Konstanten $k(\nu)$

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\left(\frac{(\xi - x)^\nu}{\nu!} \ln|\xi - x|\right) = (-1)^\nu \ln|\xi - x| + k(\nu)$$

gilt und daß das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \ln|\xi - x| \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\pi \ln 2$$

ist, wie sich auf funktionentheoretischem Wege leicht ergibt, so erkennt man die Faktoren der $a_\nu$ als Polynome $\nu$-ten Grades und damit auch $\Phi_n$ als Polynom $n$-ten Grades in $x$, für das die geforderten Bedingungen der Beschränktheit erfüllt sind.

Für die Integralgleichung (b) betrachten wir das Integral

$$\Phi(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \ln|\xi - x| d\xi \tag{6}$$

als Normalableitung des Potentials einer Streckendoppelbelegung. Es ergibt sich mit dem Operator

$$d_X = -\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{X^2-1}\,\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{X^2-1}\,\cdot\right)\right),$$

auf (6) mit $|X| > 1$ angewandt, unter Benutzung der Identität

$$(d_X - d_\xi)\frac{1}{(\xi - X)^2} \equiv 0,$$

wobei

$$d_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\cdot\right)\right) = -\frac{\partial^0}{\partial \xi^0} - 3\xi\frac{\partial^1}{\partial \xi^1} + (1-\xi^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \tag{7}$$

zunächst

$$d_X \Phi(X) = -\int_{-1}^{+1} \varphi(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\, d_\xi \frac{1}{(\xi - X)^2} d\xi.$$

Nach Teilintegration findet man sodann

$$d_X \Phi(X) = \frac{d^2}{dX^2}\int_{-1}^{+1} d_\xi \varphi(\xi)\cdot\sqrt{1-\xi^2}\ln|\xi - X| d\xi$$
$$+ \left[\left(\varphi(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\right)' \frac{1-\xi^2}{(\xi - X)^2} - \varphi(\xi)(1-\xi^2)\left(\frac{1-\xi^2}{(\xi - X)^2}\right)'\right]_{-1}^{+1}.$$

Betrachten wir insbesondere Belegungsfunktionen, die der Differentialgleichung

$$d_\xi \varphi(\xi) + \mu^2 \varphi(\xi) = 0 \tag{8}$$

genügen, so kann man sie ganz analog als Eigenfunktionen der Integralgleichung (b) identifizieren bei wörtlicher Übertragung der für (a) verwendeten Schlußweise.

Als Ergebnis finden wir demnach, daß die Eigenlösungen von (a) und (b) Polynome sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\text{(a)} \qquad D_x \varphi(x) + \mu^2 \varphi(x) = 0,$$
$$\text{(b)} \qquad d_x \varphi(x) + \mu^2 \varphi(x) = 0.$$

Die Operatoren $D_x$ und $d_x$ sind durch Gleichungen (2) und (7) erklärt. Wegen

$$d_x \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} D_x\left(\varphi\sqrt{1-x^2}\right)$$

können wir auch schreiben:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad D_x \varphi(x) + \mu^2 \varphi(x) = 0, \\ &\text{(b)} \quad D_x\left(\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\right) + \mu^2\left(\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

oder explizit in der Form:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad (1-x^2)\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \mu^2\varphi(x) = 0, \\ &\text{(b)} \quad (1-x^2)\varphi''(x) - 3x\varphi'(x) + (\mu^2 - 1)\varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

## III. Transformation auf eine geeignete unabhängige Variable und Bestimmung der Eigenlösungen und Eigenwerte.

Führen wir in (9) eine neue Variable ein durch

$$x = -\cos\vartheta; \quad \sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\vartheta}, \tag{11}$$

so gehen die Differentialgleichungen über in

$$\text{(a)} \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2}\varphi(\vartheta) + \mu^2\varphi(\vartheta) = 0,$$

$$\text{(b)} \quad \frac{d^2}{d\vartheta^2}(\varphi(\vartheta)\sin\vartheta) + \mu^2(\varphi(\vartheta)\sin\vartheta) = 0$$

mit den speziellen Lösungen ($\mu$ ganzzahlig)

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \varphi_n(\vartheta) = \cos n\vartheta \\ &\text{(b)} \quad \varphi_n(\vartheta) = \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

die gemäß den Beschränktheitsforderungen aus den allgemeinen Lösungen bereits ausgewählt sind. Es ergeben sich damit als Eigenfunktionen Tschebyscheffsche und spezielle Gegenbauersche Polynome. Für sie gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\text{(13)} \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \int_{-1}^{+1} \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ &\text{(b)} \quad \int_{-1}^{+1} \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx = 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte $\lambda_n$, die zu diesen Eigenfunktionen gehören, erhält man durch Einsetzen in die zugehörigen Integralgleichungen (a) und (b). Im vorliegenden Falle haben wir die folgenden Integrale auszuwerten:

$$I_n(x) = \int_0^\pi \cos n\vartheta\,\ln|\cos\vartheta + x|\,d\vartheta,$$

$$J_n(x) = \int_0^\pi \sin n\vartheta \sin\vartheta\,\ln|\cos\vartheta + x|\,d\vartheta.$$

Bilden wir

$$\begin{aligned} I_{n+2}(x) + I_n(x) &= \int_0^\pi (\cos(n+2)\vartheta + \cos n\vartheta)\ln|\cos\vartheta + x|\,d\vartheta \\ &= 2\int_0^\pi \cos(n+1)\vartheta\,(\cos\vartheta + x)\ln|\cos\vartheta + x|\,d\vartheta - 2x I_{n+1}(x), \end{aligned}$$

so läßt sich wegen des stetigen Integranden eine Ableitung unter dem Integral ausführen. Infolgedessen gilt

$$I'_{n+2}(x) + I'_n(x) = 2\int_0^\pi \cos(n+1)\vartheta\,(\ln|\cos\vartheta + x| + 1)\,d\vartheta - 2I_{n+1}(x) - 2x I'_{n+1}(x),$$

also

$$I'_{n+2}(x) + 2x I'_{n+1}(x) + I'_n(x) = 0 \qquad (n \geq 0). \tag{14}$$

Entsprechend finden wir

$$J'_{n+2}(x) + 2x J'_{n+1} + J'_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n \geq 1 \\ \pi & \phantom{\text{für}} \quad n = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Wegen der Anfangswerte $I'_0 = 0$; $I'_1 = \pi$ und $J'_0 = 0$; $J'_1 = -\pi\cos\vartheta$ ergibt sich aus den Rekursionsformeln zunächst

$$I'_n = \pi\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}, \; n \geq 0; \; J'_n = -\pi\cos n\vartheta, \; n \geq 1$$

und schließlich

$$I_0 = -\pi \ln 2;\ I_n = -\frac{\pi}{n}\cos n\vartheta;\ J_n'' = \pi n \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Für die Eigenwerte und Eigenfunktionen erhalten wir demzufolge:

$$(16)\qquad \left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \varphi_n = \cos n\vartheta, \quad \begin{cases} \lambda_0 = -\pi \ln 2 \\ \lambda_n = -\dfrac{\pi}{n} \end{cases} \\ \text{(b)} & \varphi_n = \dfrac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad \lambda_n = \pi n \end{array}\right\} \quad (n = 0,1,2\ldots).$$

## IV. Anwendung.

Dünne, schwach gewölbte Tragflügelprofile[4]) lassen sich in linearisierter Näherung dadurch behandeln[5]), daß man auf der Strecke zwischen $x=-1$ und $x=+1$ eine Doppelschicht ansetzt, die sich mit konstantem Potentialsprung auf der positiven $x$-Achse bis ins Unendliche fortsetzt. Ihr Potential ist mit $\varphi(-1)=0$

$$2\pi\Phi(x,z) = \int_{-1}^{\infty} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial z}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi.$$

Bilden wir die Normalgeschwindigkeit

$$2\pi\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,z) = \int_{-1}^{\infty} \varphi(\xi)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi,$$

so können wir für $z \neq 0$ wegen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2} \equiv 0$$

schreiben:

$$2\pi\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,z) = -\int_{-1}^{\infty} \varphi(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi.$$

Nehmen wir $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,0) = W(x)$ aus Anströmungsgeschwindigkeit und Profilform als gegeben an, so gilt mit $z\to 0$ und $|x|\leq 1$

$$(17)\qquad 2\pi W(x) = -\lim_{z\to 0}\int_{-1}^{\infty} \varphi(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi.$$

Denken wir uns $\varphi$ zusammengesetzt aus einer Funktion $\varphi_0$, die das gesamte Intervall überdeckt mit $\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}=0$ für $x>1$, und einer weiteren, die nur im Intervall $\langle -1,+1\rangle$ definiert ist, so liegt für $\varphi$ bei geeigneten Konvergenzforderungen folgender Ansatz nahe:

$$(18)\qquad \varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2},$$

wobei die $\varphi_n$ der Integralgleichung (b) genügen.

Demnach wird $W(x)$ dargestellt in der Form

$$2\pi W(x) = -\lim_{z\to 0}\int_{-1}^{\infty} \varphi_0(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi - \sum_{1}^{\infty} a_n\lambda_n\varphi_n(x)$$

mit

$$\varphi_n = \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta};\quad x = -\cos\vartheta;\quad \lambda_n = \pi n;\quad n = 1,2,3,\ldots.$$

$W(x)$ ist durch die $\varphi_n$ allein bereits vollständig bestimmt, jedoch ist die zu fordernde Abflußbedingung an der Hinterkante des Profils nicht erfüllt. Die Funktion $\varphi_0$ ist dem-

[4]) *W. Birnbaum, W. Ackermann*, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 290.

[5]) *K. Jaeckel*, Zur Theorie der tragenden Linie im Instationären, Luftf.-Forschg. 19 (1942), S. 57.

nach so zu wählen, daß obiges Integral den Wert Null annimmt und außerdem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}+\sum_1^\infty a_n\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\right)=0 \text{ für } \xi=1$$

gilt. In der Variablen $\vartheta$ wird diese Bedingung von folgender Form:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\vartheta}+\sum_1^\infty n a_n\cos n\vartheta=0 \text{ für } \vartheta=\pi. \tag{19}$$

Demnach muß gelten:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\vartheta}(\pi)=-\sum_1^\infty(-1)^n n a_n \text{ und } \varphi_0(0)=0$$

nach Voraussetzung. Führen wir in

$$2\pi W_0(x)=-\lim_{z\to 0}\int_{-1}^{\infty}\varphi_0(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi=-\lim_{z\to 0}\int_{-1}^{\infty}\varphi_0(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi$$

Teilintegration durch, so erhalten wir wegen $\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}(\xi)=0$ für $\xi>1$

$$2\pi W_0(x)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\ln|\xi-x|\,d\xi.$$

Setzen wir sodann

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}=-\frac{\sum_1^\infty(-1)^n n a_n}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

so folgt wegen (a)

$$2\pi W_0(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_0\sum_1^\infty(-1)^n n\,a_n\right)\equiv 0,$$

und damit sind alle geforderten Eigenschaften gewährleistet.

Es gilt also

$$\begin{aligned}\varphi(\xi)&=\sum_1^\infty a_n\varphi_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2}-\sum_1^\infty(-1)^n n\,a_n\operatorname{Arccos}(-x),\\ 2\pi W(x)&=-\sum_1^\infty a_n\lambda_n\varphi_n(x),\end{aligned}\tag{20}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

## V. Verallgemeinerung auf die entsprechenden räumlichen Probleme.

Diese lauten:

$$\text{(A)}\qquad \iint_E\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}=\lambda\varphi(x,y),$$

$$\text{(B)}\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_E\varphi(\xi,\eta)\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}=\lambda\varphi(x,y).$$

Nach dem vorangehenden Verfahren lassen sich auch die Integralgleichungen für das räumliche Problem behandeln, wenigstens was die Herleitung der Differentialgleichungen anbetrifft. Wir zeigen in diesem Abschnitt die Ermittlung der zugehörigen Differentialgleichungen und Randbedingungen für das räumliche Problem.

Für das Problem (A) stellen wir uns

$$\Phi(x,y)=\iint_E\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2(\eta-y)^2}} \tag{21}$$

als Potential einer auf der Ellipse $E\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2\leq 1\right)$ gelegenen Massenbelegung in Punkten der $xy$-Ebene selbst vor. Betrachten wir Aufpunkte $X, Y$ außerhalb der Belegung:

$$\Phi(X,Y)=\iint\limits_E \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}\frac{d\xi\, d\eta}{R}, \quad R=\sqrt{(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2}$$

und wenden den Operator $\left(\sqrt{\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2-1}=\sqrt{I}\text{ gesetzt}\right)$

$$D_{XY}=-\sqrt{I}\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{I}\frac{\partial}{\partial X}\right)-\sqrt{I}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\sqrt{I}\frac{\partial}{\partial Y}\right)$$
$$=-\frac{X}{a^2}\frac{\partial}{\partial X}-\frac{Y}{b^2}\frac{\partial}{\partial Y}+\left(1-\left(\frac{X}{a}\right)^2-\left(\frac{Y}{b}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)$$

an, den wir unter das Integralzeichen ziehen können, und berücksichtigen mit

$$(22)\qquad D_{\xi\eta}=\sqrt{II}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{II}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\sqrt{II}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{II}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\quad\left(\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}=\sqrt{II}\text{ gesetzt}\right)$$

die Identität

$$(D_{XY}-D_{\xi\eta})\frac{1}{R}\equiv 0,$$

so ergibt sich

$$D_{XY}=\iint\limits_E \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}D_{\xi\eta}\left(\frac{1}{R}\right)d\xi\, d\eta.$$

Nach Anwendung des Gaußschen Satzes finden wir, wenn $C$ den Ellipsenrand und $n$ die äußere Normale darauf bedeutet, zweimalige Differenzierbarkeit von $\varphi$ vorausgesetzt:

$$(23)\qquad D_{XY}\Phi(XY)=\iint\limits_E \frac{D_{\xi\eta}\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}\frac{d\xi\, d\eta}{R}+\int\limits_C\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cos(n,\xi)+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cos(n,\eta)\right)\frac{\sqrt{II}}{R}\right.$$
$$\left.+\varphi\sqrt{II}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial\xi}\cos(n,\xi)+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial\eta}\cos(n,\eta)\right)\right]ds.$$

Betrachten wir speziell solche Belegungsfunktionen, die der Differentialgleichung

$$(24)\qquad D_{\xi\eta}\varphi(\xi,\eta)+\mu^2\varphi(\xi,\eta)=0\quad\text{für}\quad\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2\leq 1$$

genügen mit der Forderung, daß $\varphi$ mit seinen ersten partiellen Ableitungen auch auf dem Rande beschränkt bleibt, wofür nur Polynome in Betracht kommen, so erhalten wir

$$D_{XY}\Phi(XY)=-\mu^2\iint\limits_E \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}\frac{d\xi\, d\eta}{R}.$$

Dieser Ausdruck behält auch für innere Punkte der Ellipse Bedeutung und erklärt $\Phi$ durch

$$D_{xy}\Phi(x,y)+\mu^2\Phi(x,y)=0$$

auch im Innern der Ellipse. $D_{xy}$ ist der Gleichung (22) entsprechend definiert.

$\Phi$ genügt derselben Differentialgleichung wie $\varphi$ und, wie wir aus (21) nachweisen können, auch denselben Randbedingungen, so daß $\Phi=\lambda\varphi$ sein muß, womit die Lösungspolynome der Differentialgleichung (24) als Eigenlösungen der Integralgleichung (A) aufgefunden sind. Schreiben wir für den Nachweis der Beschränktheit von $\Phi$ das Lösungspolynom in der Form

$$(25)\qquad \varphi_m(\xi,\eta)=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}a_{\mu\nu}^{(x,y)}(\xi-x)^\mu(\eta-y)^\nu,$$

$a_{\mu\nu}$ Polynome in $x$ und $y$ vom Grade $(m+n)-(\mu+\nu)$, so wird nach (21)

$$\Phi_{mn}(x,y)=\sum_0^m\sum_0^n a_{\mu\nu}^{(x,y)}\iint\limits_E \frac{(\xi-x)^\mu(\eta-y)^\nu}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}},$$

und man kann erkennen, daß die Integrale Polynome vom Grade $\mu+\nu$ sind. Setzen wir nämlich

$$\xi=x+r\cos\vartheta,\quad \eta=y+r\sin\vartheta,$$

so erhalten wir Integrale von der Form

$$\int_0^{2\pi}\cos^\mu\vartheta\sin^\nu\vartheta\,d\vartheta\int_0^{r(\vartheta)}\frac{r^{\mu+\nu}dr}{\sqrt{A+2Br+Cr^2}}$$

mit

$$A=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2};\quad B=-\left(\frac{x\cos\vartheta}{a^2}+\frac{y\sin\vartheta}{b^2}\right);\quad C=-\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)$$

und $A+2Br(\vartheta)+Cr^2(\vartheta)=0$. Auf Grund der Rekursionsformel

$$I_m=\int_0^{r(\vartheta)}\frac{r^m dr}{\sqrt{A+2Br+Cr^2}}=-\frac{m-1}{m}\frac{A}{C}I_{m-2}-\frac{2m-1}{m}\frac{B}{C}I_{m-1}\quad(m\geq 2)$$

ergibt sich mit

$$I_0=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}\frac{B}{\sqrt{B^2-AC}},\quad I_1=-\frac{B}{C}I_0-\frac{\sqrt{A}}{C}$$

weiterhin

$$I_m=G_m+U_m.$$

Hierbei gilt

$$G_m(\vartheta)=(-1)^m G_m(\pi+\vartheta);\quad U_m(\vartheta)=(-1)^{m+1}U(\pi+\vartheta),$$

so daß bei der nachfolgenden Integration über $\vartheta$ stets $U_m$ herausfällt. $G_m$ ist ein Polynom $(\mu+\nu)$-ten Grades und liefert in der Tat $\Phi_{mn}$ als Polynom $(m+n)$-ten Grades in $x$ und $y$[6]), das die Beschränktheitsforderungen erfüllt.

In entsprechender Weise fassen wir für die Integralgleichung (B) das Integral

$$\Phi(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_E \varphi(\xi,\eta)\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\tag{26}$$

als Normalableitung des Potentials einer Flächendoppelbelegung auf. Es ergeben sich mit dem Operator

$$d_{XY}=-\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{I}\,\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{I}\,\cdot\right)\right)-\frac{\partial}{\partial Y}\left(\sqrt{I}\,\frac{\partial}{\partial X}\left(\sqrt{I}\,\cdot\right)\right),$$

auf (26) in Punkten $X, Y$ außerhalb der Belegung angewandt, mit

$$d_{\xi\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{II}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{II}\,\cdot\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{II}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{II}\,\cdot\right)\right)\tag{27}$$

wegen der Identität

$$(d_{XY}-d_{\xi\eta})\frac{1}{R^2}\equiv 0$$

in wörtlicher Formulierung ganz analoge Ausdrücke.

Als Ergebnis gewinnen wir schließlich, daß die Eigenlösungen von (A) bzw. (B) diejenigen Polynome sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\text{(A)}\qquad D_{xy}\varphi(x,y)+\mu^2\varphi(x,y)=0,$$

$$\text{(B)}\qquad d_{xy}\varphi(x,y)+\mu^2\varphi(x,y)=0.$$

---

[6]) *W. Schmeidler*, Über ein zweidimensionales Analogon einer Formel der Integralrechnung, Journ. f. reine u. angew. Mathematik 183 (1941), S. 175.

Diese können mit dem Operator $D_{xy}$ allein geschrieben werden:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\text{(A)} \quad D_{xy}\varphi(x,y)+\mu^2\varphi(x,y)=0,\\ &\text{(B)} \quad D_{xy}\left(\varphi\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right)+\mu^2\left(\varphi\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right)=0 \end{aligned}$$

oder auch in der Form, aus der man die Polynome direkt ermitteln kann:

$$(29)\qquad \begin{aligned} &\text{(A)} \quad \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mu^2\varphi=0,\\ &\text{(B)} \quad \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\frac{3x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{3y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\left(\mu^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\varphi=0. \end{aligned}$$

Die Lösungspolynome, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind infolge der symmetrischen Kerne der Integralgleichungen zueinander orthogonal, und es gelten die Orthogonalitätsrelationen:

$$(30)\qquad \left.\begin{aligned} &\text{(A)} \quad \iint\limits_E \varphi_{mn}(x,y)\,\varphi_{\mu\nu}(x,y)\,\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}=0\\ &\text{(B)} \quad \iint\limits_E \varphi_{mn}(x,y)\,\varphi_{\mu\nu}(x,y)\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy=0 \end{aligned}\right\}\ (m-\mu)^2+(n-\nu)^2\neq 0.$$

Ähnlich wie im ebenen Fall kann man auch hier geeignete unabhängige Variablen einführen. In elliptischen Koordinaten läßt sich die partielle Differentialgleichung durch einen Produktansatz in zwei gewöhnliche zerspalten, für die man Lamésche Funktionen als Lösungen erkennt, so daß sich die Eigenfunktionen der Integralgleichungen (A) und (B) als Produkte von Laméschen Funktionen darstellen lassen. Die zugehörigen Eigenwerte lassen sich allerdings nicht so einfach wie im ebenen Fall durch Einsetzen bestimmen, jedoch ergeben sie sich formal aus der Bilinearentwicklung des Kernes nach den genannten Eigenfunktionen[7]). Nach dem Vorgang von W. Schmeidler kann man sich für die Auswertung von (A) und (B) auch der Koschmiederschen Polynome bedienen[8]) und durch Orthogonalisierung die gesuchten Eigenlösungen ermitteln, wodurch die Eigenwerte mitbestimmt werden.

Das entsprechende räumliche Beispiel läßt sich ähnlich formulieren und behandeln, jedoch macht die Bestimmung der Zusatzfunktion $\varphi_0$ besondere Schwierigkeiten.

---

[7]) *E. Heine*, Kugelfunktionen 2 (1881), S. 172.

[8]) *W. Schmeidler*, a. a. O.[6]).

---

Eingegangen am 22. April 1950.

# Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern.

Von *Friedrich Kasch* in Münster[1]).

## I. Problemstellung und Ergebnisse.

Der Satz vom primitiven Element lautet für kommutative Körper bekanntlich folgendermaßen:

***Eine endliche, separable Erweiterung eines kommutativen Körpers kann stets durch Adjunktion eines geeigneten Elementes erzeugt werden.***

Diesen Satz hat man in der historischen Entwicklung der Galoisschen Theorie zunächst als wesentliches Beweismittel herangezogen, dann aber schrittweise festgestellt, daß man ihn bei ihrem Aufbau vermeiden kann. Gerade diese Entwicklung hat es zu einem wesentlichen Teil erst ermöglicht, die Galoissche Theorie auf Schiefkörper zu übertragen, wie dies in jüngster Zeit von Jacobson[2]) und Cartan[3]) durchgeführt worden ist. Man kann sich nun nachträglich fragen, was sich aus der nichtkommutativen Galoisschen Theorie für den Satz vom primitiven Element folgern läßt. Von diesem Standpunkt aus wird man sich bei der Beantwortung der aufgeworfenen Frage auf galoissche Erweiterungen beschränken, die im kommutativen Fall separabel sind. Man bezeichnet bekanntlich einen Schiefkörper $L$ als eine *galoissche Erweiterung* des Grundschiefkörpers $H$, wenn der Schiefkörper, der aus allen den Elementen aus $L$ besteht, die bei den Automorphismen von $L$ über $H$ einzeln fest bleiben, mit $H$ übereinstimmt.

Zunächst ist klar, daß man den Satz vom primitiven Element nicht wörtlich auf das Nichtkommutative übertragen kann. Betrachtet man zum Beispiel einen Schiefkörper $L$ endlichen Ranges über seinem Zentrum $Z$, der bekanntlich galoissch über $Z$ ist, so erhält man durch Adjunktion eines beliebigen Elementes aus $L$ zu $Z$ nur jeweils einen kommutativen Oberkörper von $Z$, also keinesfalls $L$.

Der neue Satz, der im kommutativen Spezialfall mit dem bekannten Satz vom primitiven Element übereinstimmt, lautet folgendermaßen:

***Ist $L$ galoissche Erweiterung endlichen Ranges des Grundschiefkörpers $H$ und ist das Zentrum des Transformatorenkörpers von $L$ über $H$ separabel über dem Zentrum von $L$,***

[1]) Diese Arbeit in stilistisch anderer Fassung wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Münster/Westf. als Dissertation angenommen.

[2]) *N. Jacobson*, A note on division rings, Amer. Journal of Math. **69** (1947), 27—36.

[3]) *H. Cartan*, Théorie de Galois pour les corps non commutatifs, Ann. Éc. Norm. (3) **64** (1947), 59—77.

*so besitzt $L$ zwei erzeugende Elemente über $H$:*

$$L = H(a, a'),$$

*die bezüglich eines inneren Automorphismus konjugiert sind*[3a]).

Dabei versteht man unter dem *Transformatorenkörper* von $L$ über $H$ die Gesamtheit der Elemente aus $L$, die innere Automorphismen von $L$ über $H$ erzeugen, zuzüglich des Elementes Null von $L$, also der Elemente aus $L$, die mit allen Elementen aus $H$ einzeln vertauschbar sind.

Daraus folgt, daß bei jedem kommutativen Körper $L$ die angegebene Separabilitätsvoraussetzung erfüllt ist. Diese stellt also nicht eine Verallgemeinerung der Separabilitätsvoraussetzung dar, die im Kommutativen für die Existenz eines primitiven Elementes notwendig ist. Die Voraussetzung, daß $L$ über $H$ galoissch ist, schließt vielmehr definitionsgemäß im kommutativen Fall die Separabilität von $L$ über $H$ ein.

Da bei einem kommutativen Körper $L$ jeder innere Automorphismus mit dem identischen übereinstimmt, ist dann $a = a'$ und man erhält den bekannten Satz vom primitiven Element zurück.

Die Voraussetzungen des Satzes sind z. B. erfüllt, wenn $L$ Schiefkörper endlichen Ranges über seinem Zentrum $Z$ ist. Der Transformatorenkörper von $L$ über $Z$ ist in diesem Falle $L$ selbst.

Der Beweis für den angegebenen Satz zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil wird ein geeigneter Zwischenkörper $M$ zwischen $H$ und $L$ herausgegriffen, der über $H$ ein erzeugendes Element besitzt, $M = H(a)$. Als geeignet erweist sich ein maximaler Zwischenkörper $M$ ohne innere Automorphismen über $H$.

Der Nachweis eines solchen Zwischenkörpers $M$ fällt im Spezialfall einer Erweiterung $L$ endlichen Ranges über ihrem Zentrum $Z$ mit der bekannten Tatsache zusammen, daß man aus $L$ einen maximalen kommutativen Unterkörper herausgreifen kann, der über $Z$ separabel ist und folglich ein erzeugendes Element über $Z$ besitzt.

Die Automorphismengruppe von $L$ über einem maximalen Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $H$ hat eine besonders einfache Struktur: Sie enthält nur innere Automorphismen mit kommutativem Transformatorenkörper.

Diese Tatsache ermöglicht im zweiten Teil des Beweises den Nachweis eines zu $a$ bezüglich eines inneren Automorphismus konjugierten, erzeugenden Elementes $a'$ von $L$ über $M$. Dabei wird die angegebene Separabilitätsvoraussetzung benutzt.

## II. Vorbereitungen.

**1. Halbkommutative Polynomringe.** Unter einem *halbkommutativen Polynomring* $L[x]$ verstehen wir einen Polynomring mit Koeffizienten aus einem nicht notwendig kommutativen Körper $L$[4]) in der Unbestimmten $x$, die mit den Elementen aus $L$ kommutativ verbunden ist.

Bei den weiteren Überlegungen werden halbkommutative Polynomringe herangezogen. Wir stellen daher vorweg die folgenden einfachen Tatsachen zusammen, deren Beweis ebenso wie im kommutativen Fall erfolgt:

1. In $L[x]$ können der rechts- und linksseitige Euklidische Algorithmus durchgeführt werden. Folglich ist $L[x]$ Hauptidealring und es existiert der Quotientenkörper $L(x)$.

[3a]) Anmerkung bei der Korrektur. Es wurde mir eine Arbeit von *A. A. Albert* bekannt [Two element generation of a separable algebra, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 786—788], in der gezeigt wird, daß jede separable Algebra zwei erzeugende Elemente besitzt, jedoch nicht, daß es zwei *konjugierte* erzeugende Elemente gibt. Durch eine Kombination der Überlegung von *A. A. Albert* und des obigen Satzes kann gezeigt werden, daß jede separable Algebra ebenfalls zwei konjugierte erzeugende Elemente enthält.

[4]) Im folgenden wollen wir stets unter der Bezeichnung *Körper* sowohl kommutative als auch Schiefkörper verstehen.

2. Eine Identität zwischen Polynomen aus $L[x]$ geht bei Einsetzung eines Elementes aus dem Zentrum $Z$ von $L$ für $x$ in eine Gleichung zwischen den durch diese Einsetzung entstehenden Elemente über.

3. Aus 1. und 2. folgt, daß ein Polynom aus $L[x]$ nur endlich viele Nullstellen in $Z$ besitzt.

4. Betrachtet man $Z$ als Argumente- und $L$ als Wertebereich, so kann man in $L[x]$ die Lagrangesche Interpolationsformel einführen: Zu $n$ verschiedenen Elementen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ aus $Z$ und $n$ beliebigen Elementen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ aus $L$ gibt es ein Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades $T(x)$ in $L[x]$, welches an den Stellen $z_i$ die Werte $t_i$ besitzt. $T(x)$ ist gegeben durch

$$T(x) = P(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(x-z_i)\,P'(z_i)}$$

mit

$$P(x) = (x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n), \quad P'(z_i) = (z_i-z_1)\cdots(z_i-z_{i-1})(z_i-z_{i+1})\cdots(z_i-z_n).$$

**2. Hilfsmittel aus der Galoisschen Theorie.** Es sollen hier diejenigen Ergebnisse aus der Galoisschen Theorie zusammengestellt werden, die wir bei den weiteren Überlegungen benutzen. Dabei setzen wir das allgemeine Schema der Galoisschen Theorie als bekannt voraus.

a) Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein. Gegeben sei ein beliebiger Körper $L$ und eine Automorphismengruppe $\mathfrak{H}$ von $L$. Die Elemente aus $L$, die bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{H}$ fest bleiben, bilden einen Unterkörper von $L$, den wir den zu $\mathfrak{H}$ gehörigen *Fixkörper* nennen.

Die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen inneren Automorphismen bilden einen Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Ein Element aus $L$, welches einen in $\mathfrak{H}$ enthaltenen inneren Automorphismus erzeugt, heißt ein zu $\mathfrak{H}$ gehöriger *Transformator*.

Besteht die Menge der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Transformatoren aus den von Null verschiedenen Elementen eines Unterkörpers von $L$, so heißt $\mathfrak{H}$ eine *ausgezeichnete Automorphismengruppe*.

Geht man von einem beliebigen Unterkörper $H$ von $L$ aus, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}_H^L$ aller Automorphismen von $L$ über $H$, selbstverständlich ausgezeichnet, denn die mit den Elementen aus $H$ einzeln vertauschbaren Elemente aus $L$ bilden einen Unterkörper von $L$. Die in $\mathfrak{G}_H^L$ enthaltene Untergruppe der inneren Automorphismen bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_H^L$ und den zugehörigen Transformatorenkörper mit $T_H^L$.

Unter $Z_L$ verstehen wir das Zentrum des Körpers $L$.

Es sei jetzt $L$ galoissche Erweiterung endlichen Ranges von $H$ und $K$ ein Zwischenkörper zwischen $H$ und $L$. Dann gilt[5]:

(1) Die Galoisgruppe $\mathfrak{G}_H^L$ von $L$ über $H$ ist ausgezeichnet.

(2) Zwischen dem Rang $r$ von $L$ über $H$, dem Index $d$ von $\mathfrak{T}_H^L$ in $\mathfrak{G}_H^L$ und dem Rang $n$ von $T_H^L$ über $Z_L$ besteht die Beziehung

$$r = d \cdot n.$$

(3) Jeder Zwischenkörper $K$ ist galoisscher Unterkörper von $L$, und die Galoisgruppe von $L$ über $K$ ist ausgezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{G}_H^L$. Umgekehrt ist jede ausgezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{G}_H^L$ Galoisgruppe von $L$ über einem Zwischenkörper zwischen $H$ und $L$. Die Beziehung zwischen den ausgezeichneten Untergruppen und den Zwischenkörpern ist also eineindeutig.

---

[5]) Diese Ergebnisse sind der unter [2]) zitierten Arbeit von *Cartan* entnommen. Wir zitieren sie im folgenden mit $G(1)$ bis $G(5)$.

(4) Wenn ein Isomorphismus eines Zwischenkörpers $K$ innerhalb $L$ die Elemente von $H$ einzeln fest läßt, so kann er zu einem Automorphismus von $L$ über $H$ fortgesetzt werden.

(5) Ist $K$ invariant bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$, d. h. geht $K$ bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$ als Ganzes (nicht notwendig elementweise) in sich über, so ist $K$ galoissche Erweiterung von $H$. Notwendig und hinreichend für die Invarianz von $K$ ist die Bedingung, daß $\mathfrak{G}_K^L$ Normalteiler von $\mathfrak{G}_H^L$ ist. $\mathfrak{G}_H^K$ ist dann isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}_H^L/\mathfrak{G}_K^L$.

**b)** Aus diesen Ergebnissen der Galoisschen Theorie leiten wir eine Folgerung her.

**Satz 1.** *$L$ sei galoissche Erweiterung endlichen Ranges von $H$ und besitze nur innere Automorphismen über $H$. Ein Zwischenkörper $M$ zwischen $H$ und $L$ ist dann und nur dann maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $H$*[6]*, wenn der Transformatorenkörper $T_M^L$ von $L$ über $M$ maximaler kommutativer Unterkörper des Transformatorenkörpers $T_H^L$ von $L$ über $H$ ist.*

**Beweis.** 1. $T_M^L$ sei maximaler kommutativer Unterkörper von $T_H^L$. Das Element $t$ erzeuge einen inneren Automorphismus von $M$ über $H$. Es liegt dann sowohl in $M$ als auch in $T_H^L$. Da es in $M$ enthalten ist, muß es mit allen Elementen aus $T_M^L$ vertauschbar sein. Daraus folgt, da $T_M^L$ maximaler kommutativer Unterkörper von $T_H^L$ ist und $t \in T_H^L$, daß $t$ bereits in $T_M^L$ liegt. Dann erzeugt es aber nur den identischen inneren Automorphismus von $M$.

Betrachten wir jetzt ein Element $a \in L$, welches nicht in $M$ liegt. Da $L$ galoissch über $M$ ist, kann $a$ nicht bei allen Automorphismen von $L$ über $M$ fest bleiben, und da die Automorphismen von $L$ über $M$ innere Automorphismen sind, die durch die von Null verschiedenen Elemente aus $T_M^L$ erzeugt werden, gibt es in $T_M^L$ ein Element $b$, welches mit $a$ nicht vertauschbar ist. Da $\mathfrak{T}_M^L$ Galoisgruppe von $L$ über $M$ und $T_M^L$ kommutativ ist, muß $T_M^L$ in $M$ enthalten sein. Folglich besitzt $M(a)$ den durch $b$ erzeugten, vom identischen verschiedenen inneren Automorphismus. Damit ist $M$ als maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $H$ erkannt.

2. $M$ sei maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $H$. Wir überlegen zunächst, daß $T_M^L$ kommutativ ist. Angenommen, $T_M^L$ wäre nicht kommutativ und $u$ eines seiner Elemente, das nicht in seinem Zentrum liegt. $u$ ist dann nicht in $M$ enthalten, da die Elemente aus $M$ mit allen Elementen aus $T_M^L$ einzeln vertauschbar sind. $M(u)$ ist also ein echter Oberkörper von $M$ innerhalb $L$. Auf Grund der zu Anfang erwähnten Eigenschaften des halbkommutativen Polynomrings $M[x]$ folgt hier ebenso wie bei einem kommutativen Körper, daß $M(u)$ über $M$ eine Basis aus Potenzen von $u$ besitzt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß man $u$, da es als Element aus $T_M^L$ mit allen Elementen aus $M$ vertauschbar ist, in Polynome aus $M[x]$ einsetzen darf.

Das Element $t \in M(u)$ erzeuge einen inneren Automorphismus von $M(u)$ über $H$ und besitze die Basisdarstellung

$$t = \sum_{i=1}^{n} a_i u^i, \quad a_i \in M.$$

Da $t$ und $u$ mit allen Elementen $h \in H$ vertauschbar sind, besteht die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} h a_i u^i = \sum_{i=1}^{n} a_i h u^i, \quad h \in H.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung ist dabei

$$h a_i = a_i h,$$

[6]) Der identische innere Automorphismus ist selbstverständlich hier wie auch im folgenden stets zugelassen.

das heißt aber, daß die Elemente $a_i$ im Transformatorenkörper von $M$ über $H$ liegen. Da $M$ nach Voraussetzung keine inneren Automorphismen über $H$ besitzt, sind die Elemente $a_i$ mit allen Elementen aus $M$ vertauschbar. Da auch $u$ mit allen Elementen aus $M$ kommutativ verbunden ist, erzeugt $t$ nur den identischen inneren Automorphismus von $M(u)$. Also ist $M(u)$ ein echter Oberkörper von $M$ ohne innere Automorphismen über $H$. Damit haben wir einen Widerspruch zur Voraussetzung über $M$. Folglich muß $T_M^L$ kommutativ sein.

Ist $T_N^L$ ein $T_M^L$ umfassender, maximaler kommutativer Unterkörper von $T_H^L$ und ist $N$ der Fixkörper von $\mathfrak{T}_N^L$, so ist auf Grund der Galoisschen Theorie $N \subseteq M$ und auf Grund des ersten Teils des Beweises $N$ ein maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $H$. Da dies für $M$ vorausgesetzt wird, ist $N = M$ und folglich $T_M^L$ ein maximaler kommutativer Unterkörper von $T_H^L$.

## III. Einfache Erweiterungen.

Zur Behandlung der einfachen Erweiterungen ziehen wir einen Hilfssatz heran, der vom Kommutativen her bekannt ist.

**Hilfssatz 1.** *Gegeben sei ein beliebiger Körper $L$ und ein Unterkörper $H$ von $L$ mit unendlich vielen Elementen. $G_1, G_2, \ldots, G_m$ seien vom identischen verschiedene Isomorphismen von $L$ über $H$ in einen $L$ enthaltenden Oberkörper von $H$. Dann gibt es ein Element $b \in L$, welches bei keinem der gegebenen Isomorphismen in sich übergeführt wird:*

$$bG_j - b \neq 0 \qquad \text{für } j = 1, \ldots, m.$$

**Beweis.** Der Beweis läßt sich vom Kommutativen unmittelbar übertragen. Der Vollständigkeit halber sei er kurz angegeben.

Da die gegebenen Isomorphismen vom identischen verschieden sind, gibt es zu jedem $G_j$ ein Element $b_j \in L$ mit der Eigenschaft $b_j G_j - b_j \neq 0$. Das gesuchte Element hat dann die Gestalt

$$b = \sum_{i=1}^{m} h_i b_i,$$

wobei die $h_i$ geeignete Elemente aus $H$ sind. Die Forderung, daß $b$ bei den gegebenen Isomorphismen von seinen Konjugierten verschieden sein soll, führt zu den Ungleichungen

$$bG_j - b = \sum_{i=1}^{m} h_i (b_i G_j - b_i) \neq 0 \qquad \text{für } j = 1, \ldots, m.$$

Durch Induktion zeigt man nun leicht, daß diese Ungleichungen tatsächlich mit Elementen $h_i$ aus $H$ befriedigt werden können, wobei man einerseits die Voraussetzung benutzt, daß $H$ unendlich viele Elemente enthält, und andererseits die Tatsache, daß in jeder Ungleichung ein von Null verschiedener Koeffizient, $b_j G_j - b_j$, vorkommt.

Diesen Hilfssatz benutzen wir, um eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines erzeugenden Elementes aufzustellen.

**Satz 2.** *Es sei $L$ galoissche Erweiterung endlichen Ranges über dem Grundkörper $H$ mit unendlich vielen Elementen und $K$ ein Zwischenkörper zwischen $H$ und $L$. Gibt es zwischen $\mathfrak{G}_K^L$ und $\mathfrak{G}_H^L$ nur endlich viele ausgezeichnete Zwischengruppen, so besitzt $K$ ein erzeugendes Element über $H$:*

$$K = H(b).$$

**Beweis.** Aus jeder der endlich vielen Zwischengruppen, ausschließlich $\mathfrak{G}_K^L$, einschließlich $\mathfrak{G}_H^L$, greifen wir je einen Automorphismus heraus, der nicht bereits in $\mathfrak{G}_K^L$ liegt. Diese Automorphismen stellen vom identischen verschiedene Isomorphismen von $K$ über $H$ innerhalb $L$ dar. Auf Grund von Hilfssatz 1 gibt es dann ein Element $b$

in $K$, welches bei keinem dieser Automorphismen fest bleibt. Als Element aus $K$ bleibt $b$ bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{G}_K^L$, aber nicht bei allen Automorphismen aus jeder $\mathfrak{G}_K^L$ echt umfassenden, ausgezeichneten Untergruppe von $\mathfrak{G}_H^L$ fest. Folglich ist $H(b)$ Fixkörper von $\mathfrak{G}_K^L$ und stimmt daher mit $K$ überein: $K=H(b)$.

Wir benutzen diesen Satz, um gewisse einfache Erweiterungen zu charakterisieren.

**Satz 3.** *$L$ sei galoissche Erweiterung endlichen Ranges von $H$. Dann gilt:*

1. *Enthält einer der Körper $H$ oder $Z_L$ nur endlich viele Elemente. so besitzt $L$ ein erzeugendes Element über $H$.*

2. *Der Fixkörper $K$ der Gruppe $\mathfrak{T}_H^L$, der inneren Automorphismen von $L$ über $H$, besitzt ein erzeugendes Element über $H$:*

$$K=H(b).$$

**Beweis.** a) Hat $H$ nur endlich viele Elemente, so auch $L$ als Erweiterung endlichen Ranges. Ein Körper mit endlich vielen Elementen ist aber bekanntlich kommutativ und besitzt ein erzeugendes Element.

b) Hat $Z_L$ nur endlich viele Elemente, so auch $T_H^L$ wegen $(T_H^L:Z_L)<\infty$ (nach $G(2)$). Da der Index von $\mathfrak{T}_H^L$ in $\mathfrak{G}_H^L$ ebenfalls endlich ist, besitzt jetzt $\mathfrak{G}_H^L$ nur endlich viele Automorphismen. Die Behauptung folgt dann aus dem vorhergehenden Satz für $K=L$.

c) Aus der Endlichkeit von $\mathfrak{G}_H^L/\mathfrak{T}_H^L$ entnimmt man ferner, daß es zwischen $\mathfrak{T}_H^L$ und $\mathfrak{G}_H^L$ nur endlich viele ausgezeichnete Zwischengruppen gibt. Dann folgt die Behauptung, $K=H(b)$, ebenfalls aus dem vorhergehenden Satz.

In diesem Satz ist enthalten, daß eine galoissche Erweiterung endlichen Ranges ohne innere Automorphismen ein erzeugendes Element besitzt, denn dann ist $K=L$.

Wir benutzen den soeben konstruierten Fixkörper $K$ der Gruppe der inneren Automorphismen von $L$ über $H$, um einen maximalen Zwischenkörper $M$ ohne innere Automorphismen über $H$ zu gewinnen, der über $H$ ein erzeugendes Element besitzt. Dazu greifen wir aus dem Transformatorenkörper $T_H^L$ einen über dem Zentrum von $T_H^L$ separablen, maximalen kommutativen Unterkörper heraus, den wir mit $T_M^L$ bezeichnen. Der Fixkörper $M$ der Gruppe $\mathfrak{T}_M^L$, der, wie aus Satz 1 hervorgeht, ein maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $H$ ist, stimmt überein mit dem Vereinigungskörper von $K$ und $T_M^L$. Ein erzeugendes Element $a$ von $M$ über $H$ kann als Linearkombination des erzeugenden Elementes $b$ von $K$ über $H$ und eines erzeugenden Elementes $c$ von $T_M^L$ über $Z_{T_H^L}$ mit Koeffizienten aus $H$ gewonnen werden. Dies soll im folgenden Satz nachgewiesen werden.

**Satz 4.** *$L$ sei galoissche Erweiterung endlichen Ranges von $H$. Dann gibt es einen maximalen Zwischenkörper $M$ ohne innere Automorphismen über $H$, der über $H$ ein erzeugendes Element besitzt:*

$$M=H(a).$$

**Beweis.** Auf Grund des vorhergehenden Satzes ist die Behauptung erfüllt, falls $H$ nur endlich viele Elemente besitzt. Wir setzen daher jetzt voraus, daß $H$ unendlich viele Elemente enthält. Den Beweis führen wir in mehreren Schritten.

1. *Vorbemerkung.* Zum Transformatorenkörper $T_H^L$ gehören genau die Elemente $t\in L$, die mit allen Elementen aus $H$ einzeln vertauschbar sind, für die also

$$ht=th \text{ für alle } h\in H$$

gilt. Übt man auf diese Gleichung einen Automorphismus $G\in\mathfrak{G}_H^L$ aus, so folgt, da die Elemente aus $H$ dabei fest bleiben:

$$h\cdot tG=tG\cdot h \text{ für alle } h\in H,$$

d. h. das Bildelement von $t$ liegt ebenfalls in $T_H^L$. $T_H^L$ ist also gegenüber den Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$ als Ganzes invariant. Genau so ergibt sich, daß auch das Zentrum $Z_{T_H^L}$ von $T_H^L$ bei diesen Automorphismen invariant ist. Daraus folgt, daß der Rang eines Elementes $c \in T_H^L$ über $Z_{T_H^L}$ gleich dem Rang seiner Bildelemente über $Z_{T_H^L}$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$ ist.

2. Wir betrachten jetzt einen über $Z_{T_H^L}$ separablen, maximalen kommutativen Unterkörper von $T_H^L$, den wir mit $T_M^L$ bezeichnen. $c$ sei erzeugendes Element von $T_M^L$ über $Z_{T_H^L}$.

Der Fixkörper $M$ von $\mathfrak{T}_M^L$ ist auf Grund von Satz 1 ein maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über $K$ und, da $K$ über $H$ nur äußere Automorphismen besitzt, auch über $H$.

Wir wollen zeigen, daß das Element $c$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte besitzt, die wieder in $T_M^L$ enthalten sind. Auf Grund der Vorbemerkung ist dann klar, daß jedes dieser Konjugierten den Körper $T_M^L$ über $Z_{T_H^L}$ erzeugt. Da $\mathfrak{G}_H^L$ nur endlich viele Klassen nach $\mathfrak{T}_H^L$ besitzt ($G(2)$), genügt es nachzuweisen, daß $c$ bei den Automorphismen aus einer Klasse $G\mathfrak{T}_H^L$ nur endlich viele verschiedene, in $T_M^L$ enthaltene Bildelemente besitzt.

Wir bezeichnen $cG = c'$. Angenommen, es gibt unendlich viele innere Automorphismen $G_i (i = 1, 2, \ldots)$, so daß $c'G_i$ verschiedene Elemente aus $T_M^L$ sind. Wir wissen auf Grund der Vorbemerkung:

$$T_M^L = Z_{T_H^L}(c'G_1).$$

Dann erzeugen aber die Automorphismen $G_1^{-1}G_j$ $(j = 2, 3, \ldots)$ unendlich viele verschiedene Automorphismen von $T_M^L$ über $Z_{T_H^L}$, denn die Elemente von $Z_{T_H^L}$ bleiben bei diesen inneren Automorphismen selbstverständlich fest. Da $T_M^L$ als kommutative Erweiterung endlichen Ranges von $Z_{T_H^L}$ nur endlich viele verschiedene Automorphismen über $Z_{T_H^L}$ besitzt, haben wir damit einen Widerspruch erhalten. Folglich gibt es bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte von $c$, die in $T_M^L$ enthalten sind. Diese bezeichnen wir mit

$$c = c_1, \; c_2, \ldots, \; c_r.$$

3. Wir zeigen schließlich:

$$M = H(a) \text{ mit } a = c - hb,$$

wobei $b$ erzeugendes Element von $K$ über $H$ und $h$ ein geeignetes Element aus $H$ ist.

Ist $H = K$, so sei $h = 0$, also $a = c$. Ist $H \subset K$, so wählen wir $h$ folgendermaßen: Sind

$$b, b_1, b_2, \ldots, b_s \quad (s \geq 1),$$

die endlich vielen verschiedenen Konjugierten von $b$ bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}_H^L$ (daß nur endlich viele verschiedene Konjugierte existieren, folgt aus $G(5)$ und $G(2)$, und daß $s \geq 1$ ist, aus der Voraussetzung $H \subset K$), so sei $h$ ein Element aus $H$, das von den endlich vielen Lösungen der folgenden Gleichungen verschieden ist:

$$c_i = c + x(b_j - b), \; i = 1, 2, \ldots, r; \; j = 1, 2, \ldots, s.$$

Da $H$ unendlich viele Elemente enthält, existiert ein solches Element $h \in H$.

Um die Richtigkeit der Gleichung $M = H(a)$ nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, daß die Galoisgruppe von $L$ über $H(a)$ gleich der Galoisgruppe $\mathfrak{T}_M^L$ von $L$ über $M$ ist. Daß die Gruppe der inneren Automorphismen von $L$ über $H(a)$ mit $\mathfrak{T}_M^L$ übereinstimmt, folgt aus der Tatsache, daß die Elemente $h$ und $b$ mit allen Elementen aus $T_H^L$ und $c$ genau mit denen aus $T_M^L$ vertauschbar sind. Für den Fall $H = K$ ist damit der Beweis geführt, da es jetzt keine äußeren Automorphismen gibt.

Angenommen, $G$ ist ein äußerer Automorphismus aus $\mathfrak{G}_H^L$ und $aG=a$, ausführlich

$$cG-h\cdot bG=c-h\cdot b.$$

Da $b$ nur bei den inneren Automorphismen fest bleibt, ist dabei $bG=b_j$. Aus obiger Gleichung folgt dann

$$cG=c+h\cdot(b_j-b).$$

Wegen der Invarianz von $T_H^L$ liegt $cG$ in $T_H^L$. Auf Grund der rechten Seite der Gleichung ist $cG$ mit allen Elementen aus $T_M^L$ vertauschbar, muß also, da $T_M^L$ maximaler kommutativer Unterkörper von $T_H^L$ ist, in $T_M^L$ liegen; d. h. es ist $cG=c_i$ nach unserer Bezeichnung. Dann besteht die Gleichung

$$c_i=c+h(b_j-b),$$

im Widerspruch zur Wahl von $h$. Das Element $a$ bleibt also bei keinem äußeren Automorphismus fest. Damit haben wir das gewünschte Ergebnis: Die Automorphismengruppe von $L$ über $H(a)$ ist gleich $\mathfrak{T}_M^L$ und folglich, wie behauptet, $M=H(a)$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Zur Vorbereitung für den nächsten Satz überlegen wir nun noch, daß man $a$ insbesondere so wählen kann, daß es nicht in $Z_L$ liegt, falls nur $Z_L\subset T_H^L$.

Ist $T_M^L\subset T_H^L$, so ist dies stets der Fall, denn dann ist $c$ nicht mit allen Elementen aus $T_H^L$ vertauschbar, die Elemente $h$ und $b$ sind mit diesen vertauschbar und folglich liegt $a=c-hb$ nicht in $Z_L$.

Setzen wir jetzt $T_M^L=T_H^L$ voraus, so kann das Element $c$ beliebig in $T_H^L$ gewählt werden. Ist $H=K$, so sei $a=c$ und $c$ ein Element aus $T_H^L$, welches nicht in $Z_L$ liegt. Ein solches Element existiert wegen $Z_L\subset T_H^L$. Ist $H\subset K$, so setzen wir $c=0$. Jetzt kann das Element $h\neq 0$ beliebig in $H$ gewählt werden. Ist $b$ nicht in $Z_L$ enthalten, so sei $a=b$, andernfalls $a=hb$ $(b\neq 0)$, wobei jetzt $h\in H$ nicht in $Z_L$ liegt.

Daß ein solches Element $h$ existiert, folgt daraus, daß bei einer galoisschen Erweiterung mit nur inneren Automorphismen und kommutativem Transformatorenkörper, der Transformatorenkörper im Grundkörper enthalten sein muß. Es ist also $T_H^L\subseteq K$, wobei nach Voraussetzung $Z_L\subset T_H^L$.

Ist $Z_L\subset T_H^L$, so gibt es also stets ein erzeugendes Element $a$ von $M$ über $H$, welches nicht im Zentrum von $L$ liegt.

## IV. Existenz von zwei konjugierten, erzeugenden Elementen.

Alle bisherigen Überlegungen dienten zur Vorbereitung des in der Einleitung angegebenen Satzes, den wir jetzt herleiten wollen.

**Satz 5.** *Ist $L$ galoissche Erweiterung endlichen Ranges von $H$ und ist das Zentrum des Transformatorenkörpers $T_H^L$ separabel über dem Zentrum von $L$, so besitzt $L$ über $H$ zwei erzeugende Elemente:*

$$L=H(a,a'),$$

*die bezüglich eines inneren Automorphismus von $L$ konjugiert sind*[3a]).

**Beweis.** Aus Satz 3 geht hervor, daß $L$ in folgenden Fällen bereits durch ein Element über $H$ erzeugt wird:

1. Einer der Körper $H$ oder $Z_L$ enthält nur endlich viele Elemente.
2. Es gibt keine inneren Automorphismen von $L$ über $H$, d. h. $Z_L=T_H^L$.

In diesen Fällen ist der Satz mit $a=a'$ erfüllt.

Auf Grund dieser Feststellung können wir im folgenden voraussetzen, daß $H$ und $Z_L$ unendlich viele Elemente enthalten und $Z_L\subset T_H^L$ ist. Wir betrachten jetzt den im vorher-

gehenden Satz konstruierten Körper $M$. Über $M$ besitzt $L$ nur innere Automorphismen mit dem kommutativen Transformatorenkörper $T_M^L$. Da $T_M^L$ über $Z_{T_H^L}$ separabel ist und da außerdem nach Voraussetzung auch $Z_{T_H^L}$ separabel über $Z_L$ ist, stellt insgesamt $T_H^L$ einen separablen kommutativen Körper endlichen Ranges über $Z_L$ dar. Dieser besitzt nur endlich viele Zwischenkörper über $Z_L$ und folglich enthält die Galoisgruppe $\mathfrak{T}_M^L$ von $L$ über $M$ nur endlich viele ausgezeichneten Untergruppen. Aus jeder dieser ausgezeichneten Untergruppen, einschließlich $\mathfrak{T}_M^L$ selbst, greifen wir einen vom identischen verschiedenen Automorphismus heraus:

$$G_1, G_2, \ldots, G_n.$$

Können wir nachweisen, daß es ein zu $a$ bezüglich eines inneren Automorphismus konjugiertes Element $a'$ gibt, welches bei keinem dieser Automorphismen fest bleibt, so besteht die Galoisgruppe von $L$ über $M(a')$ nur aus dem identischen Automorphismus und es ist folglich $L = M(a')$.

Den Nachweis, daß ein solches Element $a'$ existiert, führen wir in drei Hilfssätzen, die auch an sich von Interesse sind. Bevor wir damit beginnen, stellen wir noch einmal die Voraussetzungen zusammen, die wir dabei heranziehen dürfen:

1. $Z_L$ enthält unendlich viele Elemente.

2. $Z_L \subset T_H^L$; im Anschluß an Satz 4 haben wir festgestellt, daß dann das erzeugende Element $a$ von $M$ über $H$ so gewählt werden kann, daß es nicht in $Z_L$ enthalten ist.

3. Da $L$ über $M$ galoissch mit nur inneren Automorphismen ist, gilt $Z_L \subseteq M$. Die vorstehend angegebenen Automorphismen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ können daher auch als vom identischen verschiedene Automorphismen von $L$ über $Z_L$ aufgefaßt werden.

**Hilfssatz 2**[7]. *Es seien $L$ ein beliebiger Körper und $N$ ein Unterkörper von $L$, der nicht ganz im Zentrum von $L$ enthalten ist und bei jedem inneren Automorphismus von $L$ als Ganzes invariant bleibt. Dann ist $N = L$.*

**Beweis.** Es sei $a$ ein Element aus $N$, welches nicht im Zentrum von $L$ enthalten ist. Ferner sei $v$ ein Element aus $L$, das mit $a$ vertauschbar und $u$ ein solches, das mit $a$ unvertauschbar ist. Diese Elemente genügen den folgenden Gleichungen:

$$va = av,$$
$$ua = a^* u,$$
$$(u+v)a = a'(u+v),$$

wobei die Konjugierten $a^*$ und $a'$ von $a$ wegen der Invarianz von $N$ ebenfalls in $N$ liegen und $a' - a \neq 0$ ist. Subtrahiert man die letzte Gleichung von der Summe der beiden ersten und faßt entsprechende Glieder zusammen, so erhält man die Beziehung

$$(a^* - a')u = (a' - a)v.$$

Setzt man darin $v = 1$, so folgt, daß jedes mit $a$ unvertauschbare Element $u$ aus $L$ in $N$ enthalten ist. Dann erhält man aus dieser Gleichung aber außerdem, daß auch jedes mit $a$ vertauschbare Element $v$ aus $L$ in $N$ liegt. Das sind aber alle Elemente aus $L$ und es ist folglich wie behauptet $N = L$.

Aus diesem Ergebnis ziehen wir eine Folgerung.

---

[7]) Dieser Hilfssatz stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von *H. Cartan* dar [a. a. O.[2]), Theorem 4], den *H. Cartan* mit Hilfsmitteln aus der Galoisschen Theorie beweist. Nach Beendigung dieser Arbeit wurde mir bekannt, daß diese Verallgemeinerung bereits von *R. Brauer* [On a theorem of H. Cartan, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 619–620] bemerkt worden ist.

**Hilfssatz 3.** *Ist $a$ ein Element aus einem Körper $L$, welches nicht in $Z_L$ enthalten ist, und $G$ ein vom identischen verschiedener Automorphismus von $L$ über $Z_L$, so gibt es ein Element $t \in L$ mit der Eigenschaft*

$$(tat^{-1})G - tat^{-1} \neq 0.$$

**Beweis.** Da auf Grund des vorhergehenden Hilfssatzes die Konjugierten von $a$ bei inneren Automorphismen von $L$ ein Erzeugendensystem von $L$ über $Z_L$ bilden und $G$ ein vom identischen verschiedener Automorphismus von $L$ ist, muß ein Element $t$ mit der angegebenen Eigenschaft existieren.

Dieses Ergebnis soll nun verallgemeinert werden.

**Hilfssatz 4.** *$L$ sei ein beliebiger Körper, dessen Zentrum $Z_L$ unendlich viele Elemente enthält und $a$ ein Element aus $L$, welches nicht in $Z_L$ liegt. Sind $G_1, G_2, \ldots, G_n$ beliebige, aber vom identischen verschiedene Automorphismen von $L$ über $Z_L$, so gibt es ein zu $a$ bezüglich eines inneren Automorphismus konjugiertes Element $a' = tat^{-1}$ $(t \in L)$, welches bei keinem der gegebenen Automorphismen in sich übergeführt wird:*

$$(tat^{-1})G_i - tat^{-1} \neq 0 \qquad \textit{für } i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Beweis.** Auf Grund des vorhergehenden Hilfssatzes gibt es zu jedem $G_i$ ein Element $t_i \in L$ mit der Eigenschaft

$$(t_i a t_i^{-1})G_i - t_i a t_i^{-1} \neq 0.$$

Aus den Elementen $t_i$ konstruieren wir das gesuchte Element $t$ mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel.

Dazu benutzen wir den Funktionenkörper $L(x)$, wobei $x$ eine mit allen Elementen von $L$ vertauschbare Unbestimmte ist. Da $Z_L$ unendlich viele Elemente enthält, können wir $n$ verschiedene Elemente aus $Z_L$ vorgeben: $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dann gibt es, wie wir zu Beginn dieser Arbeit festgestellt haben, ein Lagrangesches Interpolationspolynom $T(x)$, welches an den Stellen $z_i$ die Werte $t_i$ annimmt.

Wir betrachten nun die folgenden Ungleichungen:

$$(T(x)aT(x)^{-1})G_i - T(x)aT(x)^{-1} \neq 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dabei sei $xG_i = x$.

Da für Polynome aus $L(x)$ der Euklidische Algorithmus durchführbar ist, können wir diese Ungleichungen auf die folgende Gestalt bringen:

$$Z_i(x) \frac{1}{N_i(x)} \neq 0,$$

wobei $Z_i(x)$ und $N_i(x)$ Polynome sind. Auf Grund der Voraussetzung über $T(x)$ ist dabei

$$Z_i(z_i) \frac{1}{N_i(z_i)} = (t_i a t_i^{-1})G_i - t_i a t_i^{-1} \neq 0$$

ein Element aus $L$. Daraus folgt, daß die Polynome $Z_i(x)$ und $N_i(x)$ nicht identisch verschwinden. Dann hat aber das Ungleichungssystem

$$Z_i(x) \neq 0, \; N_i(x) \neq 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n$$

eine Lösung in $Z_L$, denn jedes dieser Polynome hat nur endlich viele Nullstellen in $Z_L$. Da $Z_L$ unendlich viele Elemente enthält, gibt es ein von diesen Nullstellen verschiedenes Element $z \in Z_L$. Dann haben wir offenbar in $T(z) = t$ das gesuchte Element.

Mit dem Beweis dieses Hilfssatzes haben wir auch den Beweis von Satz 5 vollendet.

---

Eingegangen am 28. April 1950.

# Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Von *Adam Schmidt* in Jena.

## I.

Kürzlich hat E. Lammel[1]) gezeigt, daß die partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} + \cdots + a_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0 \tag{1}$$

die allgemeine Lösung

$$u = \sum_{j=1}^{r} \{\varphi_{j1}(x+\lambda_j y) + y\varphi_{j2}(x+\lambda_j y) + \cdots + y^{m_j-1}\varphi_{jm_j}(x+\lambda_j y)\} \tag{2}$$

besitzt, in der die $\lambda_j$ die Nullstellen der Gleichung

$$a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^n a_n = 0 \tag{3}$$

sind und $m_j$ ihre Vielfachheiten. Lammel kam zu dieser Lösung anläßlich umfangreicher Untersuchungen über Verallgemeinerungen der Beziehungen zwischen Funktionentheorie und Potentialtheorie und mußte außer $a_n \neq 0$ die Lösung $u$ sowie die im übrigen willkürlichen Funktionen $\varphi_{jh}$ *analytisch* voraussetzen. Es scheint, daß dieser Satz trotz seines elementaren Charakters früher noch nicht bemerkt worden ist. Wir wollen daher in Abschnitt II und III dieser Arbeit einen direkten Beweis des Lammelschen Satzes mitteilen. Auf die angegebene Einschränkung, $u$ analytisch, können wir dabei verzichten. Wir setzen nur voraus, daß alle Ableitungen $n$-ter Ordnung von $u$ vorhanden und stetig sind, auch wenn einzelne nicht in der Differentialgleichung (1) auftreten. Dann ergeben sich die zu komplexen $\lambda_j$ gehörigen $\varphi_{jh}$ von selbst als analytisch, die zu reellen $\lambda_j$ gehörigen aber nur als $n$-fach stetig differenzierbar.

In Abschnitt IV dehnen wir den Satz auf Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial v_l}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

aus. Dabei benutzen wir den Weierstraßschen Elementarteilersatz, den wir für Gl. (1) noch nicht benötigen. Wir haben deshalb die Gl. (1) direkt und nicht durch Verwandlung in ein System für die $(n-1)$-ten Ableitungen behandelt. Abschnitt V und VI geben eine Diskussion der Lösungen vor allem in bezug auf Anfangswertprobleme, wobei auch gewisse inhomogene Systeme zugelassen werden.

---

[1]) *E. Lammel*, Vortrag im Mathematischen Kolloquium, Jena, November 1949.

## II.

Der Nachweis, daß (2) eine Lösung von (1) ist, kann verhältnismäßig leicht erbracht werden. Wir wollen auch $a_n = 0$ zulassen und müssen daher eine Schreibweise verwenden, in der $x$ und $y$ gleichberechtigt sind. Es sei das charakteristische Polynom der Gl. (1) in Faktoren zerlegt

$$a_0\mu^n + a_1\mu^{n-1}\nu^1 + \cdots + a_n\nu^n = c\prod_{j=1}^{r}(\nu_j\mu - \mu_j\nu)^{m_j}, \tag{5}$$

wobei $c \neq 0$ und $\mu_j\bar{\mu}_j + \nu_j\bar{\nu}_j = 1$ normiert sei. Dann kann auch die Gl. (1) in die Form

$$\prod_{j=1}^{r}\left(\nu_j\frac{\partial}{\partial x} - \mu_j\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_j} u = 0 \tag{6}$$

gebracht werden. Die Faktoren des Operatorenproduktes sind vertauschbar. (6) wird somit durch diejenigen Lösungen der Gleichungen

$$\left(\nu_j\frac{\partial}{\partial x} - \mu_j\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_j} u = 0 \tag{7}$$

gelöst, die $n$-fach stetig differenzierbar sind. Da die $\mu_j : \nu_j$ auch komplex sein können, lassen wir von vornherein auch komplexwertige Lösungen zu. Nachträglich kann dann leicht zu reellen Lösungen übergegangen werden.

Führen wir in (7) unter Fortlassung des Index $j$

$$s = \bar{\nu}x - \bar{\mu}y, \qquad t = \mu x + \nu y \tag{8}$$

als neue Variable ein, so geht (7), wenn wir zunächst $\mu$ und $\nu$ reell annehmen, in

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m} u = 0 \tag{9}$$

über. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u = F_1(t) + sF_2(t) + \frac{s^2}{2!}F_3(t) + \cdots + \frac{s^{m-1}}{(m-1)!}F_m(t), \tag{10}$$

wobei die $F_h(t)$ $m$-fach stetig differenzierbar sind.

Ist $\mu : \nu$ komplex, so kann man ebenso vorgehen, wenn man sich auf analytische Lösungen beschränkt, es ergibt sich dann (10) mit analytischen $F_h(t)$. Wir können nun zeigen, daß für komplexe $\mu : \nu$ die Lösungen von (7) stets analytisch sind, falls sie nur $m$-fach stetig differenzierbar sind.

Sei $m = 1$ und $u$ eine Lösung von (7), d. h. von

$$\left(\nu\frac{\partial}{\partial x} - \mu\frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0, \tag{11}$$

die wir als nur für reelle $x$ und $y$ erklärt annehmen. Führen wir nach (8) $s$ und $t$ ein, so ist $u$ als Funktion von $s$ und $t$ nur für solche Werte dieser Variablen erklärt, für die die Auflösung von (8) auf reelle $x$ und $y$ zurückführt. Wir setzen nun per definitionem $u$ auf den komplexen Geraden $t = \text{const.}$ selber konstant und zwar gleich dem Wert, den es im demjenigen Punkt dieser Geraden annimmt, der auf reelle $x$ und $y$ zurückführt, was natürlich nur möglich ist, wenn diese $x$ und $y$ im Existenzbereich der Lösung liegen. Zu gegebenem $t = t_1 + it_2$ kann man aus der zweiten Gleichung (8) immer eindeutig reelle $x$ und $y$ angeben; mit $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ und $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ findet man

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & \nu_1 \\ t_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & t_1 \\ \mu_2 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}. \tag{12}$$

Da nämlich $\mu:\nu$ nicht reell ist, so ist in

$$\frac{\mu_1+i\mu_2}{\nu_1+i\nu_2}=\frac{(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)+i(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)}{\nu_1^2+\nu_2^2} \tag{13}$$

sowohl der Nenner als der Imaginärteil ungleich Null. $u$ kann in der angegebenen Weise hiernach für komplexes $t$ definiert werden und zwar als Funktion von $t$ allein. Diese Funktion ist analytisch, denn es ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+i\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}+i\frac{\partial x}{\partial t_2}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}+i\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)=\frac{-i}{\begin{vmatrix}\mu_1\nu_1\\ \mu_2\nu_2\end{vmatrix}}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(i\nu_2+\nu_1)-\frac{\partial u}{\partial y}(i\mu_2+\mu_1)\right\}=0. \tag{14}$$

Damit ist auch für komplexes $\mu:\nu$

$$u=F_1(\mu x+\nu y) \tag{15}$$

mit analytischem $F_1$ die allgemeine Lösung von (11).

Ist weiter $u$ eine Lösung von (7) mit $m=2$, so gilt

$$\left(\nu\frac{\partial}{\partial x}-\mu\frac{\partial}{\partial y}\right)u=F_2(\mu x+\nu y) \tag{16}$$

mit analytischem $F_2(t)$, denn $\left(\nu\frac{\partial}{\partial x}-\mu\frac{\partial}{\partial y}\right)u$ ist eine Lösung von (11). Die Gl. (16) kann als inhomogene Differentialgleichung für $u$ angesehen werden. Eine spezielle, in $x$ und $y$ analytische Lösung von ihr ist $u_0=(\bar\nu x-\bar\mu y)F_2(\mu x+\nu y)$. Daher ist die allgemeine Lösung von (7) im Falle $m=2$ durch

$$u=F_1(\mu x+\nu y)+(\bar\nu x-\bar\mu y)F_2(\mu x+\nu y) \tag{17}$$

mit analytischen $F_1$ und $F_2$ gegeben. Das Verfahren kann fortgesetzt werden. Die allgemeine Lösung von (7) lautet also

$$u=F_{j1}(\mu_j x+\nu_j y)+\frac{(\bar\nu_j x-\bar\mu_j y)}{1!}F_{j2}(\mu_j x+\nu_j y)+\cdots+\frac{(\bar\nu_j x-\bar\mu_j y)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}F_{jm_j}(\mu_j x+\nu_j y) \tag{18}$$

mit $m_j$-fach stetig differenzierbaren bzw. analytischen $F_{jh}$.

Hiernach hat die Gl. (6) die Lösungen

$$u=\sum_{j=1}^{r}\left\{F_{j1}(u_j x+\nu_j y)+\frac{(\bar\nu_j x-\bar\mu_j y)}{1!}F_{j2}(\mu_j x+\nu_j y)+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(\bar\nu_j x-\bar\mu_j y)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}F_{jm_j}(\mu_j x+\nu_j y)\right\} \tag{19}$$

mit nun $n$-fach differenzierbaren bzw. analytischen $F_{jh}$. Wir haben zu zeigen, daß es keine anderen Lösungen gibt, d. h., daß jede Lösung von (6) in der Form (19) darstellbar ist.

## III.

Ist $u$ eine Lösung von (6), dann löst $\prod_{j=1}^{r-1}\left(\nu_j\frac{\partial}{\partial x}-\mu_j\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_j}u$ die Gl. (7) mit $j=r$, und somit ist

$$\prod_{j=1}^{r-1}\left(\nu_j\frac{\partial}{\partial x}-\mu_j\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_j}u=G_1(\mu_r x+\nu_r y)+\cdots+\frac{(\bar\nu_r x-\bar\mu_r y)^{m_r-1}}{(m_r-1)!}G_{m_r}(\mu_r x+\nu_r y). \tag{20}$$

Die gegebene Lösung $u$ genügt also auch dieser inhomogenen Gleichung. $u$ ist somit darstellbar durch eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Gl. (20) und eine Lösung der homogenisierten Gl. (20). Nehmen wir an, daß für die Lösungen der homogenisierten Gl. (20) die Darstellung (19) schon bewiesen ist, so genügt es zu zeigen, daß die inhomogene Gl. (20) eine spezielle Lösung der Gestalt (18) mit $j=r$ besitzt. Wir können also die Darstellung (19) in dieser Weise induktiv beweisen.

Um die spezielle Lösung von (20) zu gewinnen, wenden wir den Operator $\left(\nu_j \frac{\partial}{\partial x} - \mu_j \frac{\partial}{\partial y}\right)$ mit $j \neq r$ auf die Funktion

$$(21) \qquad v = f_1(\mu_r x + \nu_r y) + \frac{\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y}{1!} f_2(\mu_r x + \nu_r y) + \cdots + \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 1}}{(m_r - 1)!} f_{m_r}(\mu_r x + \nu_r y)$$

an und erhalten unter den nötigen im weiteren stets erfüllten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen:

$$(22) \qquad \left(\nu_j \frac{\partial}{\partial x} - \mu_j \frac{\partial}{\partial y}\right) v = (\nu_j \mu_r - \mu_j \nu_r) \left\{ f_1'(\mu_r x + \nu_r y) + \cdots + \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 2}}{(m_r - 2)!} f_{m_r - 1}'(\mu_r x + \nu_r y) \right.$$
$$\left. + \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 1}}{(m_r - 1)!} f_{m_r}'(\mu_r x + \nu_r y) \right\}$$
$$+ (\nu_j \bar{\nu}_r + \mu_j \bar{\mu}_r) \left\{ f_2(\mu_r x + \nu_r y) + \cdots + \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 2}}{(m_r - 2)!} f_{m_r}(\mu_r x + \nu_r y) \right\}$$

oder

$$(23) \qquad \left(\nu_j \frac{\partial}{\partial x} - \mu_j \frac{\partial}{\partial y}\right) v = g_1(\mu_r x + \nu_r y) + \frac{\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y}{1!} g_2(\mu_r x + \nu_r y) + \cdots$$
$$+ \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 1}}{(m_r - 1)!} g_{m_r}(\mu_r x + \nu_r y),$$

wobei

$$(24) \qquad \begin{aligned} g_1 &= (\nu_j \mu_r - \mu_j \nu_r) f_1' + (\nu_j \bar{\nu}_r + \mu_j \bar{\mu}_r) f_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{m_r - 1} &= (\nu_j \mu_r - \mu_j \nu_r) f_{m_r - 1}' + (\nu_j \bar{\nu}_r + \mu_j \bar{\mu}_r) f_{m_r} \\ g_{m_r} &= (\nu_j \mu_r - \mu_j \nu_r) f_{m_r}' \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Hierdurch sind nun nicht nur die $g_h$ zu gegebenen $f_h$ bestimmt, sondern man kann auch umgekehrt die $g_h$ vorgeben und geeignete $f_h$ dazu ermitteln. Durch wiederholte Anwendung dieses Umkehrungsverfahrens kann man also zu gegebenen $G_1, \ldots, G_{m_r}$ auch passende $F_{r1}, \ldots, F_{rm_r}$ finden, für die

$$(25) \qquad \prod_{j=1}^{r-1} \left(\nu_j \frac{\partial}{\partial x} - \mu_j \frac{\partial}{\partial y}\right)^{m_j} \left\{ F_{r1}(\mu_r x + \nu_r y) + \cdots + \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 1}}{(m_r - 1)!} F_{rm_r}(\mu_r x + \nu_r y) \right\}$$
$$= G_1(\mu_r x + \nu_r y) + \cdots + \frac{(\bar{\nu}_r x - \bar{\mu}_r y)^{m_r - 1}}{(m_r - 1)!} G_{m_r}(\mu_r x + \nu_r y)$$

wird. (20) besitzt also eine spezielle Lösung der gesuchten Gestalt. Damit ist auch die Darstellung (19) für alle Lösungen von (6) nachgewiesen.

Die Lösung (19) ist komplexwertig. Um die allgemeine reelle Lösung zu finden, beachte man, daß (19) jedenfalls reell ist, wenn für zwei konjugiert komplexe $\mu_{\mathrm{I}} : \nu_{\mathrm{I}}$ und $\mu_{\mathrm{II}} : \nu_{\mathrm{II}}$, wobei wir ohne Verlust an Allgemeinheit $\mu_{\mathrm{II}} = \bar{\mu}_{\mathrm{I}}$ und $\nu_{\mathrm{II}} = \bar{\nu}_{\mathrm{I}}$ annehmen dürfen, für alle $h$

$$(26) \qquad F_{\mathrm{II}\,h}(z) = \overline{F_{\mathrm{I}\,h}(\bar{z})}$$

ist. Ist eine reelle Lösung $u$ vorgelegt, so besitzt sie auch eine Darstellung (19). Ersetzt man in dieser alle Ausdrücke durch die konjugiert komplexen, so entsteht eine zweite Darstellung (19). Das arithmetische Mittel beider Darstellungen gibt bei passender Zusammenfassung eine dritte Darstellung (19), die nun die Bedingung (26) erfüllt. Unterwirft man also (19) der Bedingung (26), so erhält man die allgemeine reelle Lösung.

## IV.

Ein analoger Sachverhalt gilt für Systeme (4), die wir abgekürzt mit Matrizen

$$(27) \qquad \mathfrak{v}_t + A \mathfrak{v}_x = 0$$

schreiben wollen. Wieder fordern wir Stetigkeit der Ableitungen $\mathfrak{v}_t(t, x)$ und $\mathfrak{v}_x(t, x)$.

Nach dem Weierstraßschen Elementarteilersatz gibt es zu $A$ eine Matrix $Q$ so, daß

$$(28)\qquad A^* = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{A}_2 \cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots 0 & \mathsf{A}_r \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathsf{A}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 \cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

die bekannte Normalform annimmt, wobei die (hier nicht notwendig sämtlich voneinander verschiedenen) $\lambda_j$ Nullstellen der Gleichung

$$(29)\qquad \|A - \lambda E\| = 0$$

sind. Setzt man also

$$(30)\qquad \mathfrak{v} = Q\mathfrak{w} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{m_j} \mathfrak{q}_{jh} w_{jh}$$

(die einzelnen Spalten $\mathfrak{q}$ von $Q$ und die Elemente $w$ der einspaltigen Matrix $\mathfrak{w}$ bezeichnen wir mit zwei Indices, von denen der erste das dazugehörige $\mathsf{A}_j$ und der zweite die dazugehörige Zeile von $\mathsf{A}_j$ angibt), so zerfällt das System

$$(31)\qquad \mathfrak{w}_t + A^* \mathfrak{w}_x = 0$$

in $r$ Teilsysteme für die $w_{j1}, \ldots, w_{jm_j}$, die die Gestalt

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} w_m + \lambda \frac{\partial}{\partial x} w_m = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t} w_{m-1} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} w_{m-1} + \frac{\partial}{\partial x} w_m = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial}{\partial t} w_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} w_1 + \frac{\partial}{\partial x} w_2 = 0 \end{aligned}$$

haben. Der Index $j$ wurde fortgelassen.

Offenbar genügt es, die allgemeine Lösung von (31) aufzustellen, um die von (27) zu erhalten. Da aber (31) zerfällt, so hat man praktisch nur die allgemeinen Lösungen der Systeme (32) zu suchen.

Sei nun $w_1, \ldots, w_m$ eine Lösung von (32) bei zunächst reellem $\lambda$. Integriert man dann, nachdem man diese Lösung in (32) eingesetzt hat, längs der Geraden

$$(33)\qquad \xi = x + \lambda(\tau - t),$$

so folgt der Reihe nach, d. h. unter Beachtung der jeweils schon gewonnenen Resultate:

$$(34)\qquad \begin{aligned} w_m(t,x) &= w_m\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big), \\ w_{m-1}(t,x) &= w_{m-1}\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big) + \frac{t_0 - t}{1!} w_m\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big) \\ w_{m-2}(t,x) &= w_{m-2}\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big) + \frac{t_0 - t}{1!} \frac{\partial}{\partial x} w_{m-1}\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big) \\ &\qquad + \frac{(t_0 - t)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_m\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big), \end{aligned}$$

usw. bis zu $w_1$.

Die vorkommenden Ableitungen der $w_h$ nach $x$ und noch eine weitere existieren, da jede der Zeilen von (34) für alle $t$ und $x$ stetige partielle Ableitungen nach $x$ besitzen muß, so daß sich immer die Existenz der in der nächsten Zeile von (34) vorkommenden Ableitungen ergibt. [Bei der Differentiation der dritten Zeile von (34) findet man zunächst nur, daß

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{t_0 - t}{1!} \frac{\partial}{\partial x} w_{m-1}\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big) + \frac{(t_0 - t)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_m\big(t_0, x + \lambda(t_0 - t)\big)\right\}$$

vorhanden und stetig ist. Da dies aber für alle $x$ und $t$ gilt, folgt daraus auch Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_{m-1}$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_m$. Entsprechendes gilt für die weiteren Zeilen von (34).] Wir benutzen also wieder, daß die Lösungen stetige partielle Ableitungen besitzen sollen. (34) ist eine Darstellung durch die Anfangswerte; sie zeigt, daß unsere Lösung in der Richtung $dx = \lambda dt$ unbegrenzt fortsetzbar ist. Setzt man $t_0 = 0$, so kann man schreiben

$$
\begin{aligned}
&w_m(t,x) = f_m(x-\lambda t),\\
&w_{m-1}(t,x) = f_{m-1}(x-\lambda t) + \frac{-t}{1!} f'_m(x-\lambda t),\\
(35)\qquad &w_{m-2}(t,x) = f_{m-2}(x-\lambda t) + \frac{-t}{1!} f'_{m-1}(x-\lambda t) + \frac{(-t)^2}{2!} f''_m(x-\lambda t),\\
&\qquad\qquad \text{usw. bis zu } w_1,
\end{aligned}
$$

wobei die $f_h(x)$ $h$-mal stetig differenzierbar sind. (35) ist für reelle $\lambda$ auch schon die allgemeine Lösung von (32) mit beliebigen $h$-mal stetig differenzierbaren $f_h(x)$, wie man sich durch Einsetzen sofort überzeugt.

Ebenso könnten wir auch für komplexe $\lambda$ vorgehen, sofern wir annehmen dürften, daß unsere Lösungen in $x$ analytisch sind. [Daß sie dann auch in $t$ analytisch sind, ergibt sich nachträglich aus der Darstellung (35).] Auch hier können wir zeigen, daß jede Lösung von (32) für komplexe $\lambda$ in $x$ analytisch ist. Das ist hier sogar wegen der Bevorzugung der Variablen $t$, die wir auf reelle Werte beschränken können, etwas einfacher.

Wir ergänzen zunächst $w_m(t,x)$ für die Punkte der durch den reellen Punkt $t, x$ gehenden komplexen Geraden

$$(36)\quad \zeta = x + \lambda(\tau - t), \text{ d. h. } x = \xi - \frac{\mu}{\nu}\eta,\ t = \tau - \frac{1}{\nu}\eta \ (\tau \text{ reell},\ \zeta = \xi + i\eta,\ \lambda = \mu + i\nu),$$

indem wir auf ihr

$$(37)\qquad w_m(\tau, \zeta) = w_m(t, x)$$

setzen. Es entsteht eine in $\zeta$ analytische Funktion; denn es wird

$$(38)\quad i\nu\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right) w_m(\tau, \zeta) = i\nu\frac{\partial}{\partial x} w_m(t, x) + \mu\frac{\partial}{\partial x} w_m(t,x) + \frac{\partial}{\partial t} w_m(t,x) = 0.$$

Jede Lösung der zweiten Gleichung von (32) ist wieder analytisch, denn diese Gleichung besitzt die spezielle in $x$ analytische Lösung $w^0_{m-1} = -t\frac{\partial}{\partial x} w_m(t,x)$ und die homogenisierte zweite Gl. (32) kann nur analytische Lösungen haben. Ebenso verfährt man mit der dritten Gl. (32) usw.

Die allgemeine komplexwertige Lösung von (27) lautet somit:

$$(39)\quad \mathfrak{v} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{m_j} \mathfrak{q}_{jh}\left\{f_{jh}(x-\lambda_j t) + \frac{-t}{1!} f'_{jh+1}(x-\lambda_j t) + \cdots + \frac{(-t)^{m_j-h}}{(m_j-h)!} f^{(m_j-h)}_{jm_j}(x-\lambda_j t)\right\}.$$

Um die allgemeine *reelle* Lösung zu finden, beachte man zunächst, daß man zu zwei konjugiert komplexen Kästchen $A_{\mathrm{II}} = \overline{A}_{\mathrm{I}}$ der Matrix $A^*$ auch die zugehörigen Spalten der Matrix $Q$

$$(40)\qquad \mathfrak{q}_{\mathrm{II}h} = \overline{\mathfrak{q}_{\mathrm{I}h}}$$

konjugiert komplex bestimmen kann. Ist das geschehen, so erhält man wie am Schluß von Abschnitt III die allgemeine reelle Lösung von (27), indem man (39) der Bedingung

$$(41)\qquad f_{\mathrm{II}h}(z) = \overline{f_{\mathrm{I}h}(\bar{z})}$$

unterwirft.

## V.

Die Lösungen (19) und (39) bedürfen kaum einer Deutung. Die einzelnen Teillösungen existieren in Streifen der Richtung $\mu_j dx + \nu_j dy = 0$ bzw. $dx = \lambda_j dt$. Damit ein gemeinsamer Existenzbereich zustande kommt, darf der Durchschnitt dieser Streifen nicht leer sein.

Die Darstellung (39) kann zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0(x) \text{ für } t = 0 \tag{42}$$

benutzt werden. Setzt man in (39) $t = 0$, so folgt

$$f_{jh}(x) = \mathfrak{P}_{jh}\mathfrak{v}_0(x). \tag{43}$$

Dabei bedeutet die einzeilige Matrix $\mathfrak{P}_{jh}$ die dem Doppelindex $jh$ zugehörige Zeile der Matrix $Q^{-1}$, so daß also $\mathfrak{P}_{jh}\mathfrak{q}_{j'h'}$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem $j = j'$ und $h = h'$ ist oder nicht.

Sind alle $\lambda_j$ reell und alle $m_j = 1$, so muß zur Lösung des Anfangswertproblems einmalige stetige Differenzierbarkeit von $\mathfrak{v}_0(x)$ gefordert werden. Sind nicht alle $m_j = 1$, so muß $\mathfrak{v}_0$ so gegeben werden, daß die Linearkombinationen $\mathfrak{P}_{jh}\mathfrak{v}_0(x)$ $h$-mal stetig differenzierbar sind. Fortsetzungsgebiet, Einflußgebiet und Abhängigkeitsgebiet[2]) lassen sich elementar übersehen.

Sind nicht alle $\lambda_j$ reell, so ist das Anfangswertproblem nur lösbar, wenn die zu komplexen $\lambda_j$ gehörenden Linearkombinationen $\mathfrak{P}_{jh}\mathfrak{v}_0(x)$ in $x$ analytisch sind. Dabei gibt ein reelles $\mathfrak{v}_0$ auch eine reelle Lösung. Sind nämlich die Spalten von $Q$ nach (40) bestimmt worden, so ist auch $\mathfrak{P}_{j\mathrm{II}h} = \overline{\mathfrak{P}_{j\mathrm{I}h}}$, so daß

$$f_{j\mathrm{I}h}(x) + f_{j\mathrm{II}h}(x) = \mathfrak{P}_{j\mathrm{I}h}\mathfrak{v}_0(x) + \overline{\mathfrak{P}_{j\mathrm{I}h}}\mathfrak{v}_0(x) \tag{44}$$

für reelle $x$ reell ist. Daraus folgert man leicht, daß (41) erfüllt ist.

Man kann die zu einem der $\mu_j : \nu_j$ bzw. $\lambda_j$ gehörigen Teillösungen, die sich in gewissen Richtungen wie Polynome mit konstanten Koeffizienten verhalten, in leichter Verallgemeinerung des Üblichen als „Wellen" in diesen Richtungen auffassen. Das ist besonders naheliegend bei Verwendung der unabhängigen Veränderlichen $t$ und $x$. Die $\lambda_j$ wären dann die „Fortpflanzungsgeschwindigkeiten" der Wellen.

## VI.

Unsere Lösungsverfahren zeigen, daß man auch gewisse inhomogene Probleme behandeln kann, wenn nämlich die Störfunktionen selber den Charakter einer Welle haben. Beispiele inhomogener Differentialgleichungen (1) sind in Abschnitt II und III enthalten. Die Art, wie man bei Systemen vorgehen kann, zeigt das folgende einfache Beispiel:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} v_1 + \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial x} v_2 = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t} v_2 + a\frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial x} v_2 + F(x-t) = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Es wurde von Perron[3]) neben zwei anderen ebenfalls hierhergehörigen als Beispiel dafür angegeben, daß Stetigkeit der die Gleichung bildenden Funktionen die Existenz von

---

[2]) Vgl. *Courant-Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik **2** (1937), 307.

[3]) *O. Perron*, Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungen im reellen Gebiet, Math. Zeitschr. **27** (1928), 549.

Lösungen nicht sichert. Zur Lösung von (45) vergleichen wir das System

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} v_1 + \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial x} v_2 = 0, \\
(46) \qquad &\frac{\partial}{\partial t} v_2 + a \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial x} v_2 + \frac{\partial}{\partial x} v_3 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} v_3 + \frac{\partial}{\partial x} v_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Hat (45) eine Lösung $v_1, v_2$ und ist $F(x-t)$ stetig, so lösen $v_1, v_2, v_3 = \int\limits_{s_0}^{x-t} F(s)\,ds$ das System (46). Umgekehrt gibt jede Lösung von (46), die der Nebenbedingung

$$(47) \qquad \frac{\partial}{\partial x} v_3 = F(x-t)$$

genügt, eine Lösung von (45). Die allgemeine Lösung von (46) lautet:

$$
(48) \qquad \left.
\begin{aligned}
v_1 &= f_1\big(x-(1+\sqrt{a})t\big) + f_2\big(x-(1-\sqrt{a})t\big) - \frac{1}{a} f_3(x-t) \\
v_2 &= \sqrt{a}\, f_1\big(x-(1+\sqrt{a})t\big) - \sqrt{a}\, f_2\big(x-(1-\sqrt{a})t\big) \\
v_3 &= f_3(x-t)
\end{aligned}
\right\} \text{für } a \neq 0
$$

bzw.

$$
(49) \qquad \left.
\begin{aligned}
v_1 &= f_1(x-t) - t f_2'(x-t) + \frac{t^2}{2} f_3''(x-t) \\
v_2 &= f_2(x-t) - t f_3'(x-t) \\
v_3 &= f_3(x-t)
\end{aligned}
\right\} \text{für } a = 0.
$$

Perron zeigte, daß das inhomogene System (45) mit der Anfangsbedingung $v_1 = v_2 = 0$ längs $t = 0$

für $a > 0$ lösbar ist, falls die Störfunktion $F$ stetig ist,
für $a = 0$, falls $F$ zweimal stetig differenzierbar ist,
für $a < 0$, falls $F$ analytisch ist.

All das liest man ohne Mühe an den Lösungen (48) bzw. (49) ab, wenn man beachtet, welchen Bedingungen die Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$ jeweils genügen müssen. Während Perron diese Abhängigkeit von dem Parameter $a$ für bemerkenswert hielt, weil man ein solches Verhalten von den gewöhnlichen Differentialgleichungen herkommend nicht erwartet, fällt an unseren Lösungsverfahren gerade eine starke Analogie mit gewissen Methoden zur Lösung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf. Das gleiche Vorgehen führt also ganz naturgemäß zu dem von Perron bemerkten Unterschied.

Formulieren wir abschließend die erwähnte Analogie für Systeme etwas genauer. (Für die Gleichung $n$-ter Ordnung gilt Ähnliches, falls man die Symmetrie in $x$ und $y$ aufgibt.) Die Lösungen der Systeme

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{v}(t, x) + A \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{v}(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \mathfrak{v}(t) + A\, \mathfrak{v}(t) = 0$$

gehen auseinander hervor, indem man in der allgemeinen Lösung des letzteren

$$(50) \qquad \mathfrak{v} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{m_j} \mathfrak{q}_{jh} \left\{ c_{jh}\, e^{-\lambda_j t} + \frac{-t}{1!} c_{jh+1}\, e^{-\lambda_j t} + \cdots + \frac{(-t)^{m_j-h}}{(m_j-h)!} c_{jm_j}\, e^{-\lambda_j t} \right\}$$

die Ausdrücke $\frac{(-t)^k}{k!} c_{jh+k}\, e^{-\lambda_j t}$ durch $\frac{(-t)^k}{k!} f_{jh+k}^{(k)}(x-\lambda_j t)$ ersetzt, wobei die $f_{jh}$ $h$-mal stetig differenzierbar bzw. analytisch sind. Zum Beweis nehme man die nötigen Ersetzungen an den Gln. (27) bis (32) vor.

---

Eingegangen am 6. Juni 1950.

# Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. I.

## Primäre, kompakte Linearformenmoduln.

Von *Heinz Schöneborn* in Bonn.

### Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird im Anschluß an Ergebnisse von W. Krull[1]) eine Theorie der unendlichen bewerteten Linearformenmoduln über dem Ring der ganzen $\pi$-adischen Zahlen[2]) ($\pi$ ganz-rationale Primzahl) entwickelt.

Ausgehend von der Menge aller formalen unendlichen Summen in abzählbar vielen Unbestimmten mit ganz-$\pi$-adischen Zahlkoeffizienten wird in naheliegender Weise eine Addition und eine Operatorenmultiplikation definiert und in dem so gebildeten Linearformenmodul eine rein formale Limesoperation eingeführt, hinsichtlich deren er sich als kompakt erweist. Im Anschluß daran gelingt mit Hilfe eines grundlegenden Grenzwertvertauschungssatzes die Entwicklung eines Kalküls, der eine Übertragung von Methoden der gewöhnlichen linearen Algebra auf den hier vorliegenden Fall ermöglicht.

Mit Hilfe eines von Krull stammenden Kunstgriffes[3]) (Übergang vom Operatorenbereich $\Pi$ der ganz-$\pi$-adischen Zahlen zum Restklassenkörper von $\Pi$ nach dem von $\pi$ erzeugten Ideal) wird der wichtige Begriff des *Grundmoduls* in den Rahmen der Theorie eingeordnet und ein dem Steinitzschen Austauschsatz analoger Satz bewiesen.

In Kap. V ergibt sich ein für die Fortführung der Theorie entscheidender Unterschied zwischen den Untermoduln des hier betrachteten und denen eines endlichen Linearformenmoduls. Während nämlich im endlichen Falle jeder Untermodul eine *Diagonaldarstellung* besitzt, trifft dies hier nicht ausnahmslos zu. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, daß ein Untermodul als Diagonalmodul darstellbar ist. Im Anschluß daran gewinnt man, ähnlich wie im endlichen Falle, eine isomorphieinvariante Kennzeichnung der Diagonal-Untermoduln durch ein Zahlensystem.

---

[1]) *W. Krull*, Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen, Journ. f. Math. **184** (1942), 19.

[2]) Aus dem in Fußnote [5]) erläuterten Zusammenhang des betrachteten Moduls mit den Krullschen separablen Gruppen und der direkten Zerlegbarkeit dieser Gruppen in primäre Summanden folgt, daß die Beschränkung auf die Betrachtung *primärer* Moduln ohne Einschränkung der Allgemeinheit erfolgen kann. — Vgl. *Krull*[1]), Anm. 12.

[3]) *W. Krull*, Linearformenmoduln und lineare Gleichungssysteme in unendlich vielen Variabeln über einem diskret bewerteten perfekten Körper. Monatshefte f. Math. u. Physik **43** (1936), 463. — Die von *Krull* hier betrachteten Moduln sind nicht bewertet und der Konvergenzvorgang findet im Multiplikatorenkörper statt.

*Zeichenerklärung.* Sind $A, B, A_i$ Mengen, $a_i, a_{ij}$ ihre Elemente, so bedeutet:

| | |
|---|---|
| $A \subset B$ | $A$ ist (echte oder unechte) Teilmenge von $B$, |
| $A \cap B$ | Durchschnitt von $A$ und $B$, |
| $\bigcap_i A_i$ | Durchschnitt der Mengen $A_i$, |
| $[a_i]_i$ | die Folge $a_1, a_2, \ldots$, |
| $[a_{ij}]_{i,j}$ | die von den $a_{ij}$ gebildete Doppelfolge $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots$ |

Andere Bezeichnungen sind in üblicher Weise gewählt. Weitere werden im Text eingeführt.

## I. Der kompakte $\Pi$-Modul.

**1.** Es sei $\pi$ eine ganz-rationale Primzahl, $\Pi$ der Ring der ganzen $\pi$-adischen Zahlen und $u_1, u_2, \ldots$ eine abgezählte Menge von Unbestimmten. $M$ sei die Menge aller formalen unendlichen Summen

$$\varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2 + \cdots = \sum_i \varrho_i u_i \quad (\varrho_i \varepsilon \Pi),$$

von denen zwei dann und nur dann gleich sein sollen, wenn ihre Koeffizienten gleich sind.

**Definition.** $M$ heißt ein *primärer* (zur Primzahl $\pi$ gehöriger) *kompakter $\Pi$-Modul* — im folgenden kurz als $\Pi$-Modul bezeichnet — in Zeichen $M = \{u_1, u_2, \ldots\}$, wenn zwischen den Elementen von $M$ die folgenden Beziehungen bestehen:

(a) Eine Multiplikation von Elementen aus $M$ mit Elementen aus $\Pi$ wird definiert durch

$$\varrho \cdot \sum \varrho_i u_i = \sum \varrho \varrho_i \cdot u_i \quad (\varrho, \varrho_i \in \Pi).$$

(b) Je zwei Elementen $u = \sum \varrho_i u_i$ und $v = \sum \sigma_i u_i$ aus $M$ wird die Summe

$$u + v = \sum (\varrho_i + \sigma_i) u_i$$

zugeordnet.

(c) Gewisse Elementfolgen $v_1, v_2, \ldots$ mit $v_j = \sum_i \varrho_{ji} u_i$ werden als konvergent gegen den Limes $v \in M$ erklärt — in Zeichen $v = \lim_j v_j$ — durch die Festsetzungen

$$\lim (\varrho_j \cdot u) = (\lim \varrho_j) \cdot u \quad (u \in M \text{ beliebig})$$

$$\lim_j v_j = \lim_j \left( \sum_i \varrho_{ji} u_i \right) = \sum_i (\lim_j \varrho_{ji} u_i),$$

wobei die linken Seiten dann und nur dann definiert sein sollen, wenn es die rechten sind[4]). Unter $\lim \varrho_j (\varrho_j \in \Pi)$ ist dabei der gewöhnliche $\pi$-adische Limes zu verstehen.

**2.** Sind in $u = \sum \varrho_i u_i$ alle $\varrho_i = 0$, so soll $u$ ebenfalls durch das Symbol 0 bezeichnet werden. Wegen (b) ist $v + 0 = v$ für jedes $v \in M$. Ist $u = \sum \varrho_i u_i$ und $v = \sum (-\varrho_i) u_i$, so setzen wir natürlich $v = -u$. Aus (b) folgt sofort, daß $M$ hinsichtlich der Bildung endlicher Summen eine gewöhnliche Abelsche Gruppe ist, die wegen der Definition der Gleichheit in $M$ nur Elemente unendlicher Ordnung enthält. Diese Gruppe gestattet den Operatorenbereich $\Pi$, d. h. für beliebige Elemente $u, v$ aus $M$ gilt, wie leicht zu sehen,

$$\tau(u + v) = \tau u + \tau v \tag{1}$$

$$(\varrho + \tau) u = \varrho u + \tau u \tag{2}$$

$$\varrho(\tau u) = (\varrho \tau) u. \tag{3}$$

[4]) Jede unverknotete kompakte separable Gruppe im Sinne von *Krull* [1]) genügt den Axiomen (a) bis (c) und kann somit als kompakter $\Pi$-Modul aufgefaßt werden.

Sind $v_j = \sum \varrho_{ji} u_i$ beliebige Elemente von $M$, so ergibt sich mit Hilfe der in (c) und (a) postulierten Rechenregeln für beliebiges $\varrho \in \Pi$:

$$\varrho \lim v_j = \lim \varrho v_j, \tag{4}$$

wenn eine der beiden Seiten einen Sinn hat.

Existieren ferner $\lim v_j$ und $\lim w_j$, so beweist man unter Zuhilfenahme von (b) und (c):

$$\lim (v_j + w_j) = \lim v_j + \lim w_j. \tag{5}$$

Aus der Definition des Grenzwertes in (c) folgt, daß jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergent gegen den gleichen Grenzwert ist und ferner, daß jede beliebige Elementfolge aus $M$ eine konvergente Teilfolge enthält; denn der entsprechende Satz gilt in $\Pi$ und überträgt sich vermöge der Definition der Konvergenz in (c) mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens sofort auf $M$. Hierdurch ist die Bezeichnung *kompakt* für den Modul $M$ gerechtfertigt.

**3.** Wir ordnen nun jedem Element $u = \sum \varrho_i u_i \in M$ eine reelle Zahl $|u|$ als absoluten Betrag zu durch die

**Festsetzung.** Es sei $e > 1$ eine beliebige, aber ein für allemal fest gewählte, reelle Zahl. Dann sei

$$|0| = 0;$$

$$|u| = e^{-r} \begin{cases} \text{wenn in } u = \sum \varrho_i u_i \text{ die Koeffizienten} \\ \varrho_k \equiv 0 \pmod{\pi^{r-k+1}} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, r \\ \text{und außerdem für mindestens ein } j \text{ mit } 1 \leq j \leq r+1 \\ \varrho_j \not\equiv 0 \pmod{\pi^{(r+1)-j+1}}; \end{cases}$$

$$|u| = 1, \text{ wenn } \varrho_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}\ ^{5)}.$$

Ordnen wir — wie üblich — der ganzen $\pi$-adischen Zahl $\varrho$ den Absolutbetrag $|\varrho| = e^{-r}$ zu, wenn $\varrho$ durch $\pi^r$, nicht aber durch $\pi^{r+1}$ teilbar ist, so gilt, wie leicht zu sehen,

$$|\varrho u| = |\varrho|\,|u| \tag{6}$$

$$|u + v| \leq \operatorname{Max}(|u|, |v|). \tag{7}$$

In $M$ gilt nunmehr das Cauchysche Konvergenzkriterium:

Eine Elementfolge $v_1, v_2, \ldots$ aus $M$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\lim_j |v_{j+1} - v_j| = 0$$

gilt. Denn die Konvergenz der Folge der $v_j$ mit $v_j = \sum \varrho_{ji} u_i$ ist gleichbedeutend mit der Existenz von

$$\lim_j v_j = \lim_j \sum_i \varrho_{ji} u_i = \sum_i (\lim_j \varrho_{ji}) u_i,$$

und diese wiederum ist gleichbedeutend mit der Existenz von $\lim_j \varrho_{ji}$ für jedes $i$. Nach

---

[5]) Unsere Festsetzung besagt also: Es ist $|u| = e^{-r}$, wenn $u$ „vom Typus" $\pi^r u_1 + \pi^{r-1} u_2 + \cdots + \pi u_r + \cdots$ ist. Übrigens ist klar, daß die Menge aller Elemente $u$ mit $|u| \leq e^{-r}$ im Sinne der Krullschen Theorie eine abgeschlossene Untergruppe $M_r$ und daß die $M_r$ eine *charakteristische Kette* von $M$ bilden. Hieraus folgt, daß $M$ eine unverknotete separable Gruppe im Sinne Krulls ist und da nach [4]) auch umgekehrt jede solche Gruppe ein $\Pi$-Modul ist, folgt die Identität beider Begriffe.

dem in $\Pi$ geltenden Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert also $v = \lim v_j$ dann und nur dann, wenn $\lim\limits_j |\varrho_{j+1,i} - \varrho_{ji}| = 0$ für jedes $i$. Wegen

$$v_{j+1} - v_j = \sum_i (\varrho_{j+1,i} - \varrho_{ji}) u_i$$

und nach Definition der Absolutbeträge in $\Pi$ und $M$ folgt hieraus die Behauptung.

Natürlich kann man das Cauchysche Konvergenzkriterium auch für unendliche Summen $\sum\limits_{j=1}^{\infty} w_j$ [6]) aussprechen. Die Konvergenzbedingung lautet dann

$$\lim |w_j| = 0.$$

Hieraus sowie aus $|u| \leq 1$, $|\sigma| \leq 1$ für jedes $u \in M$ und $\sigma \in \Pi$ und aus (6) folgt noch:

$\sum \sigma_j v_j$ konvergiert für beliebige $\sigma_j \in \Pi$ bzw. für beliebige $v_j \in M$ sicher dann, wenn $\lim |v_j| = 0$ bzw. $\lim |\sigma_j| = 0$ ist.

Übrigens sieht man noch leicht, daß die Bedingungen $\lim |v_j| = 0$ und $\lim v_j = 0$ gleichbedeutend sind.

## II. Basis eines $\Pi$-Moduls.

**4. Definitionen.** Ein System von abzählbar vielen Elementen $v_j$ des $\Pi$-Moduls $M$ heißt ein *Erzeugendensystem* von $M$, wenn $\lim v_j = 0$ ist, und wenn sich jedes Element von $M$ in der Form $\sum \sigma_j v_j$ darstellen läßt.

Eine endliche oder abzählbare Menge $v_1, v_2, \ldots$ von Elementen aus $M$ heißt *linear unabhängig*, wenn aus $\sum \varrho_j v_j = 0$ stets $\varrho_j = 0$ folgt. Anderenfalls heißen die $v_j$ *linear abhängig*.

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $M$ bezeichnen wir als eine *Basis* von $M$.

Ist $v_1, v_2, \ldots$ ein Erzeugendensystem von $M$, so schreiben wir $M = \{v_1, v_2, \ldots\}$.

**Satz 1.** *Für eine abzählbare Menge $v_1, v_2, \ldots$ von Elementen aus $M$ mit $\lim v_i = 0$ gilt stets*

$$\lim_j \sum_i \tau_{ji} v_i = \sum_i \lim_j \tau_{ji} v_i, \tag{8}$$

*sofern die rechte Seite einen Sinn hat* [7]).

---

[6]) Natürlich wird die unendliche Summe $\sum w_j$ wie üblich definiert: $\sum w_j = \lim\limits_i \sum\limits_{j=1}^{i} w_j$. Die von vornherein eingeführten Summen $\sum \varrho_i u_i$ ordnen sich offenbar dieser Definition unter. Wegen (4) und (5) gilt:

$$\varrho \sum w_j = \sum \varrho w_j, \quad \sum (v_j + w_j) = \sum v_j + \sum w_j.$$

Letzteres, wenn die rechte Seite einen Sinn hat.

[7]) Unter den gleichen Bedingungen wie (8) gilt:

$$\sum_k \sum_i \varrho_{ki} v_i = \sum_i \sum_k \varrho_{ki} v_i, \tag{8'}$$

$$\lim_k \lim_i \varrho_{ki} v_i = \lim_i \lim_k \varrho_{ki} v_i. \tag{8''}$$

Denn (8') läßt sich auf (8) zurückführen durch die Beziehungen

$$\sum_k \sum_i \sigma_{ki} v_i = \lim_j \sum_{k=1}^{j} \sum_i \sigma_{ki} v_i = \lim_j \sum_i \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ki} v_i = \lim_j \sum_i \tau_{ji} v_i$$

bzw.

$$\sum_i \sum_k \sigma_{ki} v_i = \sum_i \lim_j \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ki} v_i = \sum_i \lim_j \tau_{ji} v_i \quad \text{mit} \quad \tau_{ji} = \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ki},$$

und ähnlich (8''), wenn man $\varrho_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{k} \tau_{ji}$ setzt.

*Sind darüberhinaus die $v_i$ linear unabhängig, so folgt auch umgekehrt aus der Existenz der linken Seite von* (8) *die der rechten, und* (8) *gilt in beiden Richtungen*[8]).

Wir beweisen zunächst die Richtigkeit von (8) unter der Voraussetzung der Existenz aller auftretenden Grenzwerte.

**Hilfssatz.** *Es sei* $\lim v_i = 0$, *und es werde*

$$\tau_{ji} v_i = v_i^j$$

*gesetzt. Ferner sei*

$$\text{(a)}\ \sum_i v_i^j = v^j; \quad \text{(b)}\ \lim_j v_i^j = v_i'; \quad \text{(c)}\ \sum_i v_i' = v'; \quad \text{(d)}\ \lim_j v^j = v$$

— wobei die Existenz der beiden Summen (a) und (c) nach der Bemerkung am Schluß von Nr. **3** aus der Voraussetzung $\lim v_i = 0$ folgt, *während die Existenz der beiden Limites* (b) *und* (d) *vorausgesetzt wird* —. *Dann ist* $v = v'$, *d. h. es gilt*

$$\lim_j \sum_i v_i^j = \sum_i \lim_j v_i^j.$$

**Beweis des Hilfssatzes.** Aus $\lim v_i = 0$ folgt $\lim v_i^j = 0$ nach (6), d. h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $i_0 = i_0(\varepsilon)$, der von $j$ unabhängig ist, so daß $|v_i^j| < \varepsilon$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$. Gehen wir nun von der Reihe $\sum_i v_i^j$ zu der Folge der Partialsummen

$$w_k^j = \sum_{i=1}^{k} v_i^j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

über, so lautet die Cauchysche Konvergenzbedingung also

$$|w_k^j - w_{k-1}^j| = |v_k^j| < \varepsilon \qquad \text{für } k \geq k_0 = i_0(\varepsilon).$$

Die Folgen $[w_k^j]_k$ konvergieren daher gleichmäßig in $j$, und aus (a) folgt

$$(\alpha_1) \qquad |w_{k_1}^{j_1} - v^{j_1}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } k_1 \geq k_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$(\alpha_2) \qquad |w_{k_2}^{j_2} - v^{j_2}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } k_2 \geq k_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

und aus (d)

$$(\beta) \qquad |v^{j_1} - v^{j_2}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } j_1, j_2 \geq j_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

also aus $(\alpha_1)$, $(\alpha_2)$, $(\beta)$:

$$(\gamma) \qquad |w_{k_1}^{j_1} - w_{k_2}^{j_2}| < \varepsilon \qquad \text{für } j_1, j_2, k_1, k_2 \geq N(\varepsilon),$$

wo $N(\varepsilon) = \operatorname{Max}(k_0, j_0)$. Die Ungleichung $(\gamma)$ besagt aber die totale Konvergenz der Doppelfolge $[w_k^j]_{j,k}$, d. h. die Existenz eines Elementes $v_T \in M$ so, daß

$$(\delta) \qquad |w_k^j - v_T| < \varepsilon \qquad \text{für } k, j \geq N(\varepsilon).$$

Aus $(\alpha_1)$ oder $(\alpha_2)$ folgt dann mit Hilfe von $(\delta)$:

$$(\varepsilon) \qquad v = \lim v^j = v_T.$$

Setzen wir ferner $w_k = \sum_{i=1}^{k} v_i'$, so ist nach (c):

$$(\zeta) \qquad |w_k^j - w_k| < \varepsilon \qquad \text{für } k \geq M(\varepsilon, j),$$

---

[8]) Derselbe Satz gilt auch für beliebige kompakte Gruppen im Sinne von *Krull* [1]), sein zweiter Teil allerdings nur für solche, die zyklisch direkt zerlegbar sind. Der Beweis verläuft dort genau so, wie der oben geführte. Der Satz findet sich bei *Krull* nicht. Übrigens läßt sich (8) — wenigstens in einer Richtung — auf die ganzen $\pi$-adischen Zahlen selber übertragen: Ist $[\varrho_{ij}]_{i,j}$ eine Doppelfolge ganzer $\pi$-adischer Zahlen und existiert $\sum_i \varrho_{ji}$ für jedes $j = 1, 2, \ldots$ sowie $\sum_i \lim_j \varrho_{ji}$, so existiert auch $\lim_j \sum_i \varrho_{ji}$, und es ist $\lim_j \sum_i \varrho_{ji} = \sum_i \lim_j \varrho_{ji}$. Beweis wörtlich derselbe wie der Beweis des ersten Teiles von Satz 1.

und hieraus und aus ($\delta$) folgt wegen $\lim w_k = \sum v_i'$.

$$(\eta) \qquad v' = \sum v_i' = \lim w_k = v_T.$$

Aus ($\varepsilon$) und ($\eta$) ergibt sich dann die Behauptung des Hilfssatzes.

**Beweis von Satz 1.** Wir benutzen die im Hilfssatz verwendeten Bezeichnungen und schließen wie folgt. Erstens: Es existiere $\lim\limits_j v_i^j = v_i'$. Dann läßt sich wegen der Kompaktheit aus der Folge $[v^j]_j$ eine konvergente Teilfolge $[v^{j_k}]_k$ auswählen. Auf diese aber läßt sich der Hilfssatz anwenden, und die Teilfolge erweist sich als konvergent gegen den eindeutig bestimmten Grenzwert $\sum\limits_i \lim\limits_k v_i^{j_k} = \sum\limits_i \lim\limits_j v_i^j$. Alle konvergenten Teilfolgen von $[v^j]_j$ haben also denselben Limes; daraus folgt die Konvergenz von $[v^j]_j$ und hieraus nach dem Hilfssatz die Behauptung.

Zweitens: $\lim v^j = v$ möge existieren. Ferner wird jetzt die lineare Unabhängigkeit der $v_i$ vorausgesetzt. Dann läßt sich wegen der Kompaktheit nach dem Cantorschen Diagonalverfahren eine Teilfolge $[v^{j_k}]_k$ von $[v^j]_j$ konstruieren, so daß für die gleichen Indizes $j_k$ die Folgen $[v_i^{j_k}]_k$ $(i = 1, 2, \ldots)$ konvergent sind, etwa

$$\lim_k v_i^{j_k} = v_i' \qquad (v_i' = (\lim_k \tau_{j_k i})\, v_i).$$

Dann sind für die Doppelfolge $[v_i^{j_k}]_{i,k}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt, und es ist

$$v = \lim_j v^j = \lim_k v^{j_k} = \lim_k \sum_i v_i^{j_k} = \sum_i \lim_k v_i^{j_k} = \sum_i v_i'.$$

In $v = \sum\limits_i v_i'$ sind aber wegen der linearen Unabhängigkeit der $v_i$ die

$$v_i' = \lim_k v_i^{j_k} = (\lim_k \tau_{j_k i})\, v_i$$

eindeutig bestimmt, und weil auch $v = \lim v^j$ unabhängig von der anfangs ausgewählten Teilfolge eindeutig festliegt, ergibt sich, daß sogar die ganze Folge $[v_i^j]_j$ gegen $v_i'$ konvergiert.

Aus $v = \lim v^j$ und $v = \sum v_i'$ folgt dann die Behauptung. Damit ist alles bewiesen.

**5. Satz 2.** *Eine abzählbare Menge $v_1, v_2, \ldots$ von Elementen des $\Pi$-Moduls $M = \{u_1, u_2, \ldots\}$ bildet dann und nur dann eine Basis von $M$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\lim |v_j| = 0$.

(b) *Die $v_j$ sind linear unabhängig.*

(c) *Jedes $u_i$ von $M = \{u_1, u_2, \ldots\}$ ist darstellbar in der Form*

$$u_i = \sum_j \sigma_{ij} v_j.$$

**Beweis.** Daß die Bedingungen notwendig sind, ist klar. Sie seien erfüllt. Ferner sei $v = \sum \varrho_i u_i$ ein beliebiges Element von $M$. Dann folgt nach (8):

$$v = \sum_i \varrho_i u_i = \sum_j (\sum_i \varrho_i \sigma_{ij})\, v_j = \sum \sigma_j v_j$$

mit $\sigma_j = \sum\limits_i \varrho_i \sigma_{ij}$. Also ist $v$ als lineare Verbindung der $v_j$ darstellbar. Hieraus folgt Satz 2.

**6.** Bei der Definition von $M$ und weiterhin bei der Bewertung von $M$ sind wir von einer bestimmten (nämlich der natürlichen) Reihenfolge der $u_i$ ausgegangen. Es leuchtet aber ein, daß die Basiseigenschaften der $u_i$ und die Konvergenzeigenschaften von $M$ nicht von der Reihenfolge der $u_i$ abhängen können. Hinsichtlich der Basiseigenschaften folgt dies aus Satz 2, denn die Bedingungen (a) bis (c) sind offenbar von der Reihenfolge der $v_j$ unabhängig. Ist aber $v_1, v_2, \ldots$ eine Basis von $M$ und $v = \sum \sigma_j v_j$, und wird die Folge der Indizes $j$ in endlich oder unendlich viele Teilfolgen aufgelöst:

$$j_{11}, j_{12}, \ldots; j_{21}, j_{22}, \ldots; \ldots,$$

so sieht man leicht, daß

$$v = \sum_j \varrho_j v_j = \sum_k \sum_q \varrho_{jkq} v_{jkq}.$$

Hieraus ergibt sich, daß es bei der Bildung unendlicher Summen in den $v_j$ auf die Reihenfolge der $v_j$ nicht ankommt.

## III. Lineare Transformationen.

7. Eine lineare Transformation des Moduls $M = \{u_1, u_2, \ldots\}$ ist eine stetig homomorphe Abbildung $f$ von $M$ in sich[9]).

Diese ist bekannt, wenn die Bildelemente $v_j = f(u_j)$ der Basiselemente von $M$ bekannt sind, denn aus $u = \sum \varrho_j u_j$ folgt dann

$$f(u) = f(\sum \varrho_j u_j) = \sum \varrho_j f(u_j) = \sum \varrho_j v_j.$$

Ist nun

$$v_i = f(u_i) = \sum_j \tau_{ij} u_j,$$

so wird die Abbildung $f$ — wie üblich — gekennzeichnet durch Angabe der Matrix:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} \tau_{12} \cdots \\ \tau_{21} \tau_{22} \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{pmatrix}.$$

Damit $f$ stetig ist, müssen Nullfolgen in Nullfolgen übergehen. Wegen $\lim u_i = 0$ ist also $\lim v_i = 0$, und daraus folgt nach (8):

$$0 = \lim_i v_i = \lim_i \sum_j \tau_{ij} u_j = \sum_j \lim_i \tau_{ij} u_j;$$

also $\lim_i \tau_{ij} = 0$ für alle $j$. Die Spalten der Matrix $T$ konvergieren also alle gegen Null. Matrizen mit dieser Eigenschaft sollen als *spaltenkonvergent* bezeichnet werden.

Umgekehrt vermittelt jede spaltenkonvergente Matrix $T = (\tau_{ij})$ vermöge der Festsetzungen

$$f(u_i) = v_i = \sum_j \tau_{ij} u_j,$$

$$f(\sum_i \varrho_{ki} u_i) = \sum_i \varrho_{ki} f(u_i) = \sum_i \varrho_{ki} v_i$$

eine lineare Transformation $f$ von $M$.

In der Tat besitzt die so definierte Abbildung offenbar die Homomorphieeigenschaft. Es ist noch nachzuweisen, daß sie stetig ist, d. h. daß Nullfolgen in Nullfolgen übergehen. Sei also $\lim w_k = 0$ und $w_k = \sum_i \varrho_{ki} u_i$. Dann ist

$$f(w_k) = f(\sum_i \varrho_{ki} u_i) = \sum_i \varrho_{ki} f(u_i) = \sum_i \sum_j \varrho_{ki} \tau_{ij} u_j = \sum_j (\sum_i \varrho_{ki} \tau_{ij}) u_j.$$

Wir zeigen nun $\lim_k \sum_i \varrho_{ki} \tau_{ij} = 0$, denn dann ergibt sich

$$\lim_k f(w_k) = \lim_k \sum_j (\sum_i \varrho_{ki} \tau_{ij}) u_j = \sum_j \big(\lim_k (\sum_i \varrho_{ki} \tau_{ij})\big) u_j = 0$$

wie behauptet.

---

[9]) Natürlich heißt eine Abbildung $f$ von $M$ stetig, wenn stets

$$f(\lim w_i) = \lim f(w_i)$$

ist, sofern die linke Seite existiert. — Eine homomorphe Abbildung ist dann und nur dann stetig, wenn sie Nullfolgen in Nullfolgen überführt.

Nun ist nach Voraussetzung

$$\lim_k w_k = \lim_k \sum_i \varrho_{ki} u_i = \sum_i (\lim_k \varrho_{ki}) u_i = 0,$$

also $\lim_k \varrho_{ki} = 0$ für alle $i$. Mithin ist $\lim_k (\varrho_{ki}\tau_{ij}) = 0$, also auch

$$\sum_i \lim_k (\varrho_{ki}\tau_{ij}) = 0 \text{ für alle } j.$$

Daraus folgt nach dem am Schluß von Fußnote [7]) Gesagten:

$$\lim_k \sum_i (\varrho_{ki}\tau_{ij}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Damit ist alles bewiesen.

Wir können also sagen, daß die linearen Transformationen von $M$ durch spaltenkonvergente Matrizen vermittelt werden und umgekehrt. Summe und Produkt zweier spaltenkonvergenten Matrizen werden wie üblich definiert und sind wieder spaltenkonvergent.

**8.** Ist die lineare Transformation $f$ eine umkehrbare eindeutige Abbildung von $M$ *auf* sich [10]), so ist auch die reziproke Abbildung $f^{-1}$ eine lineare Abbildung von $M$. Die Transformation $f$ und die zugehörige Matrix $T$ heißen dann *invertierbar*. $f$ ist dann und nur dann invertierbar, wenn die Basis $u_1, u_2, \ldots$ von $M$ wieder in eine Basis übergeht. Ferner sieht man genau wie bei endlichen Matrizen:

Die Invertierbarkeit der Matrix $T$ ist gleichbedeutend damit, daß die Gleichung $T \cdot X = E$, wo $E$ die unendliche Einheitsmatrix bedeutet, eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

**9. Definition.** Eine Folge $S_1, S_2, \ldots$ linearer Transformationen von $M$ heißt *konvergent* gegen die lineare Transformation $S$, wenn für jedes $v \in M$ gilt:

$$\lim_k S_k(v) = S(v).$$

Jede Folge $S_1, S_2, \ldots$ linearer Transformationen aus $M$ besitzt eine konvergente Teilfolge. In der Tat: Sei $u_1, u_2, \ldots$ eine Basis von $M$. Wir wählen aus der Folge $S_1(u_1)$, $S_2(u_1), \ldots$ eine konvergente Teilfolge $S_{j_1}(u_1), S_{j_2}(u_1), \ldots$ und setzen $S_{j_1} = T_1$. Dann wählen wir aus der Folge $S_{j_2}(u_2), S_{j_3}(u_2), \ldots$ eine konvergente Teilfolge $S_{j_{i_1}}(u_2), S_{j_{i_2}}(u_2), \ldots$ und setzen $S_{j_{i_1}} = T_2$. So fortfahrend erhalten wir eine Teilfolge $T_1, T_2, \ldots$ der $S_i$, für welche

$$\lim_k T_k(u_i) = \lim_k v_i^k = v_i \qquad (T_k(u_i) = v_i^k)$$

für jedes $i$ existiert. Aus $\lim_k v_i^k = v_i$, $\lim_i v_i^k = 0$ folgt aber in bekannter Weise

$$\lim_i v_i = \lim_i \lim_k v_i^k = \lim_k \lim_i v_i^k = 0.$$

Dann ist die durch die Abbildung $u_i \to v_i$ bestimmte lineare Transformation $T$ Limes der Folge $T_1, T_2, \ldots$.

Ist $S_1, S_2, \ldots$ eine gegen $S$ konvergente Folge invertierbarer linearer Transformationen, so ist auch $S$ invertierbar und $S^{-1} = \lim S_k^{-1}$. Sei nämlich $w$ irgendein Element von $M$ und $S_k(u_i) = v_i^k$, $\lim_k S_k(u_i) = S(u_i) = v_i$. Dann gibt es für jedes $k$ eine Darstellung

---

[10]) Es gibt auch stetig isomorphe Abbildungen von $M$ auf einen echten Untermodul von $M$, z. B. ist die Abbildung $f(u_i) = u_{i+1}$ eine solche. Aber die Umkehrung einer derartigen Abbildung ist, nach unserer Definition des Begriffes, keine lineare Transformation mehr.

$w = \sum_i \sigma_i^k v_i^k$ und es ist

$$\lim_k \sum_i \sigma_i^k v_i^k = \sum_i (\lim_k \sigma_i^k v_i^k) = w.$$

Aus der Existenz von $\lim_k (\sigma_i^k v_i^k)$ und von $\lim_k v_i^k = v_i$ folgt aber in leicht ersichtlicher Weise die Existenz von $\lim_k \sigma_i^k = \sigma_i$ und ferner $\lim_k \sigma_i^k v_i^k = \sigma_i v_i$, also $w = \sum \sigma_i v_i$. Folglich läßt sich jedes Element von $M$ als Linearkombination in den $v_i$ darstellen, und daraus folgt die Invertierbarkeit von $S = \lim S_k$. Die Relation $S^{-1} = \lim S_k^{-1}$ ist fast unmittelbar einzusehen.

## IV. Untermoduln.

**10. Definition.** Eine Untermenge $N$ des $\Pi$-Moduls $M$, die ihrerseits (hinsichtlich der in $M$ erklärten Summen- und Limesbildung) einen $\Pi$-Modul bildet, heißt *Untermodul* von $M$.

**Satz 3.** *Eine Untermenge $N \subset M$ ist dann und nur dann Untermodul von $M$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *$N$ enthält mit jedem Element $v$ auch $\varrho \cdot v$ ($\varrho$ beliebig aus $\Pi$) und mit zwei Elementen $u$ und $v$ auch $u+v$.*

(b) *Sind $v_1, v_2, \ldots$ Elemente aus $N$ und existiert $\lim v_j$ in $M$, so liegt $\lim v_j$ bereits in $N$.*

**Beweis.** Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. — Daß die Bedingungen hinreichen, beweist man durch Konstruktion einer Basis von $N$ ganz ähnlich, wie bei gewöhnlichen Linearformenmoduln endlichen Ranges.

**11.** Aus dem vorangehenden Satz folgt, daß der Durchschnitt beliebig vieler Untermoduln von $M$ wieder ein Untermodul ist.

Sind $U_1, U_2, \ldots$ Elementarkomplexe aus $M$, so verstehen wir unter dem von $U_1, U_2, \ldots$ erzeugten Untermodul $\{U_1, U_2, \ldots\}$ natürlich den kleinsten alle $U_i$ umfassenden Untermodul von $M$.

Sind $N_1, N_2$ zwei Untermoduln von $M$, so besteht der von ihnen erzeugte Untermodul $N$ aus allen Summen

$$t_1 + t_2 \quad (t_1 \in N_1;\, t_2 \in N_2).$$

In der Tat: Jedenfalls ist die Menge $T$ aller Summen $t_1 + t_2$ in $N$ enthalten, und es ist $N_1 \subset T$, $N_2 \subset T$. Es genügt also zu zeigen, daß $T$ ein Untermodul von $M$ ist.

Die Bedingung (a) von Satz 3 ist für $T$ offenbar erfüllt. Sei nun $[v_i]_i$ eine in $M$ konvergente Folge aus $T$, etwa

$$v_i = t_{1i} + t_{2i} \quad (t_{1i} \in N_1,\ t_{2i} \in N_2).$$

Dann gibt es wegen der Kompaktheit konvergente Teilfolgen $[t_{1i_j}]_j$, $[t_{2i_j}]_j$ der Folgen $[t_{1i}]_i$ und $[t_{2i}]_i$, und es ist wegen der Moduleigenschaft von $N_1$ und $N_2$

$$\lim_j t_{1i_j} = t_1 \in N_1,\ \lim_j t_{2i_j} = t_2 \in N_2,$$

also nach (5)

$$\lim v_i = \lim (t_{1i_j} + t_{2i_j}) = t_1 + t_2 \in T.$$

Also ist auch Bedingung (b) von Satz 3 erfüllt und $T$ ein Untermodul von $M$.

Der Begriff der direkten Summe endlich vieler Untermoduln wird wie üblich definiert. Im Falle (abzählbar) unendlich vieler Untermoduln $N_1, N_2, \ldots$ kommt noch die Bedingung hinzu, daß jede Summe $\sum \varrho_i v_i$ ($v_i \in N_i$) existieren und also $\lim v_i = 0$ sein muß.

Ist $N$ ein Untermodul von $M$ und $v \in M$, so ist die Ordnung modulo $N$ von $v$, in Zeichen $o_N(v)$, die kleinste Potenz $\pi^r$ von $\pi$, so daß $\pi^r v$ in $N$ liegt.

Sind $v_1, v_2, \ldots$ nicht in $N$ gelegene Elemente von $M$, so heißen die $v_i$ *linear unabhängig mod* $N$, wenn aus jeder Relation

$$\sum \varrho_i v_i \equiv 0 \pmod{N}$$

folgt

$$\varrho_i \equiv 0 \big(\bmod o_N(v_i)\big).$$

Elementsysteme, in denen in $N$ gelegene Elemente vorkommen, gelten stets als linear abhängig mod $N$.

**12.** Es sei $M = \{u_1, u_2, \ldots\}$. Unter $\pi M$ verstehen wir die Menge aller Elemente

$$u = \sum \varrho_i u_i \text{ mit } \varrho_i \equiv 0 \pmod{\pi} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Wie nach Satz 3 leicht zu sehen, ist $\pi M$ ein Untermodul von $M$. Wir können also die Restklassengruppe $M/\pi M$ bilden. $M$ werde durch die Abbildung $f$ in der üblichen Weise auf die Restklassengruppe $M/\pi M$ homomorph abgebildet:

$$f(M) = M/\pi M.$$

Die Abbildung $f$ wird stetig, wenn in $M/\pi M$ eine geeignete Limesoperation definiert wird:

Die Folge $v_1', v_2', \ldots$ von Restklassen aus $M/\pi M$ sei konvergent gegen den Grenzwert $v'$, wenn es in $M$ eine Folge $v_1, v_2, \ldots$ gibt mit $\lim v_i = v$ und $f(v_i) = v_i'$, $f(v) = v'$. Dann ist

$$\lim f(v_i) = f(\lim v_i),$$

wenn die rechte Seite einen Sinn hat.

Ist $u_1, u_2, \ldots$ eine Basis von $M$ und $u_i' = f(u_i)$, so ist $\lim u_i' = 0$, und $M/\pi M$ besteht aus allen Summen $\sum \varrho_i u_i'$ $(\varrho_i \in \Pi)$.

Ist $v' \neq 0$ ein Element von $M/\pi M$, so gilt $\varrho v' = \sigma v'$ dann und nur dann, wenn $\varrho \equiv \sigma \pmod{\pi}$ ist.

Wir können also den Operatorenbereich $\Pi$ von $M/\pi M$ ersetzen durch den Restklassenkörper $\Pi' = \Pi/(\pi)$, wo $(\pi)$ das von $\pi$ in $\Pi$ erzeugte Ideal ist. Wenn die homomorphe Abbildung $\varphi$ von $\Pi$ auf $\Pi'$ ebenso wie oben $f$ durch Einführung einer Limesoperation in $\Pi'$ stetig gemacht ist, dann kann die Abbildung $f$ von $M$ auf $M/\pi M$ ersetzt werden durch die Abbildung $F$, definiert durch

$$F(\sum \varrho_i u_i) = \sum \varphi(\varrho_i) \cdot f(u_i) = \sum \varrho_i' u_i'.$$

Als Abbildung von $M$ auf $M/\pi M$ ist $F$ mit $f$ völlig identisch, nur ist in $F$ noch der Übergang vom Operatorenbereich $\Pi$ zu $\Pi' = \Pi/(\pi)$ enthalten. Wir bezeichnen die mit dem Operatorenbereich $\Pi'$ versehene Restklassengruppe $M/\pi M$ mit $M'$.

Die Elemente $v_1', v_2', \ldots$ von $M'$ heißen natürlich linear unabhängig, wenn aus

$$\sum \varrho_i' v_i' = 0 \qquad (\varrho_i' \in \Pi')$$

stets folgt $\varrho_i' = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ist $v_i' = F(v_i)$, so sind die $v_i'$ dann und nur dann linear unabhängig, wenn die $v_i$ linear unabhängig mod $\pi M$ sind. Aus der linearen Unabhängigkeit mod $\pi M$ der $v_i$ folgt aber ihre lineare Unabhängigkeit schlechthin. Denn wären die $v_i$ linear abhängig, d. h. also $\sum \varrho_i v_i = 0$ mit mindestens einem $\varrho_k \neq 0$, und ist $\pi^r$ die höchste in allen $\varrho_k \neq 0$ aufgehende Potenz von $\pi$, so ist

$$0 = \sum \varrho_i v_i = \pi^r \cdot \sum \sigma_i v_i,$$

also $\sum \sigma_i v_i = 0 \in \pi M$. Unter den $\sigma_i$ ist aber mindestens eines, etwa $\sigma_k$, für das $\sigma_k \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ist. Daraus folgt die lineare Abhängigkeit mod $\pi M$ der $v_i$ — im Gegensatz zur Voraus-

setzung. Mithin folgt aus der linearen Unabhängigkeit der $v_i'$ die der $v_i$. Die Umkehrung hiervon ist nicht allgemein richtig.

$M'$ besteht aus allen Summen $\sum \varrho_i' u_i'$ $\left(\varrho_i' \in \Pi', u_i' = F(u_i)\right)$. Aus $\sum \varrho_i' u_i' = 0'$ folgt

$$\sum \varrho_i u_i \in \pi M \quad \left(\varphi(\varrho_i) = \varrho_i'\right)$$

und daraus $\varrho_i \equiv 0 \pmod{\pi}$, also $\varrho_i' = 0'$. Die $u_i' = F(u_i)$ sind also linear unabhängig und bilden eine Modulbasis von $M'$.

$M'$ ist also ein kompakter Linearformenmodul wie $M$ und unterscheidet sich von diesem nur durch den Operatorenbereich. Die Eigenschaften von $M$ übertragen sich vermöge der stetig homomorphen Abbildung $F$ weitgehend auf $M'$.

Eine Basis $v_1', v_2', \ldots$ von $M'$ ist natürlich gekennzeichnet durch die Eigenschaften:

(a) $\lim v_i' = 0$.

(b) Die $v_i'$ sind linear unabhängig.

(c) Der von den $v_i'$ erzeugte Untermodul von $M'$ ist mit $M'$ identisch.

**13.** Ist $v_1, v_2, \ldots$ eine Basis von $M$, so ist, wie oben für die $u_i$ gezeigt, $v_1', v_2', \ldots$ $\left(v_i' = F(v_i)\right)$ eine Basis von $M'$.

Ist umgekehrt $v_1', v_2', \ldots$ eine Basis von $M'$, so läßt sich aus jeder Restklasse $v_i'$ (mindestens) ein Element $v_i \in M$ so auswählen, daß $v_1, v_2, \ldots$ eine Basis von $M$ ist, oder anders ausgedrückt:

*Es gibt eine Basis $v_1, v_2, \ldots$ von $M$ mit $F(v_i) = v_i'$.*

Zum Beweise mögen die $v_i$ aus den Restklassen $v_i'$ so bestimmt werden, daß $\lim v_i = 0$, was nach Definition der Grenzwertbildung in $M'$ möglich ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $v_i'$ sind dann nach obigem auch die $v_i$ linear unabhängig. Schließlich sei $N = \{v_1, v_2, \ldots\}$. Nach Konstruktion der $v_i$ erzeugt $N$ mit $\pi M$ zusammen ganz $M$. Ist nun $u$ ein beliebiges Element von $M$, so läßt sich $u$ in der Form

$$u = w_1 + \pi t_1 \qquad (w_1 \in N;\ \pi t_1 \in \pi M)$$

schreiben. Das gleiche gilt aber für $t_1$:

$$t_1 = w_2 + \pi t_2, \text{ also } u = w_1 + \pi w_2 + \pi^2 t_2.$$

Allgemein erhalten wir, so fortfahrend:

$$u = w_1 + \pi w_2 + \pi^2 w_3 + \cdots + \pi^r w_{r+1} + \pi^{r+1} t_{r+1}$$

für jedes $r$ mit $w_i \in N$. Daraus folgt durch Grenzübergang sofort $u = \sum \pi^{i-1} w_i \in N$. Mithin ist $N = M$. Damit ist alles bewiesen.

Zwischen den Basen von $M$ und denen von $M'$ besteht also eine umkehrbare Beziehung.

Es ist nun noch zu untersuchen, inwieweit sich diese Reziprozität auf beliebige, der Konvergenzbedingung $\lim v_i = 0$ bzw. $\lim v_i' = 0'$ genügende linear unabhängige Elementsysteme $v_1, v_2, \ldots$ bzw. $v_1', v_2', \ldots$ aus $M$ bzw. $M'$ ausdehnen läßt, oder anders ausgedrückt, ob zwischen den Untermoduln von $M$ und denen von $M'$ eine umkehrbare Beziehung besteht.

Hinsichtlich der Konvergenzbedingung $\lim v_i = 0$ bzw. $\lim v_i' = 0'$ gelten hier offensichtlich die gleichen Bemerkungen, die oben für den Fall einer Basis von $M$ und $M'$ gemacht wurden[11]). Wir suchen nun nach einer Bedingung dafür, daß die Basis eines Untermoduls $N \subset M$ linear unabhängig mod $\pi M$ ist.

---

[11]) D. h. also: Ist $\lim v_i = 0$, so auch $\lim v_i' = \lim F(v_i) = 0'$. Ist umgekehrt $\lim v_i' = 0'$, so läßt sich aus jeder Restklasse $v_i'$ ein $v_i$ so auswählen, daß $\lim v_i = 0$ ist.

**Definition.** Der Untermodul $N \subset M$ heißt *Grundmodul* (in $M$), wenn aus $\varrho v \in N$ stets $v \in N$ folgt.

**Satz 4.** *Eine beliebige Basis $v_1, v_2, \ldots$ des Untermoduls $N \subset M$ ist dann und nur dann linear unabhängig mod $\pi M$, wenn $N$ Grundmodul in $M$ ist.*

**Beweis.** Sind die $v_j$ linear abhängig mod $\pi M$, so gibt es in $N$ ein Element $\pi v \in \pi M$ mit $\pi v = \sum \varrho_j v_j$, wo mindestens ein $\varrho_j \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ist. Dann liegt $v$ offenbar nicht in $N$, und $N$ ist kein Grundmodul. Sei umgekehrt $N$ kein Grundmodul. Dann gibt es ein $v \notin N$ mit $\pi v \in N$. Es sei $\pi v = \sum \varrho_j v_j$. Da die Gleichung $\pi x = \pi v (\in N)$ in $M$ nur die eindeutig bestimmte Lösung $v$ haben kann, und da $v$ nicht in $N$ liegt, sind die $\varrho_j$ nicht sämtlich durch $\pi$ teilbar. Daraus folgt die lineare Abhängigkeit mod $\pi M$ der $v_j$. Nunmehr ergibt sich: Jedem System linear unabhängiger Elemente $v'_1, v'_2, \ldots$ aus $M'$ mit $\lim v'_i = 0$ entspricht ein (i. a. nicht eindeutig bestimmtes) System $v_1, v_2, \ldots$ linear unabhängiger Elemente aus $N$ mit $\lim v_i = 0$ und $F(v_i) = v'_i$. Der von den $v_i$ erzeugte Modul ist ein Grundmodul in $M$. Bilden umgekehrt die $v_i$ die Basis eines Grundmoduls in $M$, so sind auch die Elemente $v'_i = F(v_i)$ aus $M'$ linear unabhängig, und es gilt $\lim v'_i = 0$.

**14.** Die im Vorstehenden entwickelte Theorie des Zusammenhanges zwischen $M$ und $M'$ gestattet es, gewisse auf $M$ bezügliche Fragen auf solche für $M'$ zurückzuführen. Dies kann von Vorteil sein, da der Koeffizientenbereich von $M'$ im Gegensatz zu dem von $M$ ein Körper ist.

Eine derartige Anwendungsmöglichkeit bietet das Problem der Invertierbarkeit linearer Transformationen von $M$. Eine andere, uns momentan mehr interessierende Möglichkeit ist der Beweis eines dem Steinitzchen Austauschsatz entsprechenden Satzes. Wir zeigen zunächst:

**Hilfssatz.** *Es sei $u'_1, u'_2, \ldots$ eine Basis von $M'$, ferner $v'_1, v'_2, \ldots$ ein System linear unabhängiger Elemente aus $M'$ mit $\lim v'_i = 0$. Dann gibt es ein Teilsystem $u'_{i_1}, u'_{i_2}, \ldots$ der $u'_i$ so, daß das aus $u'_1, u'_2, \ldots$ durch Ersetzung der $u'_{i_j}$ durch die $v'_j$ entstehende System wieder eine Basis von $M'$ bildet.*

Der Beweis verläuft genau wie bei gewöhnlichen Linearformenmoduln durch sukzessive „Eingliederung" der $v_j$ in der Reihenfolge ihrer Numerierung.

**Satz 5 (Austauschsatz).** *Es sei $u_1, u_2, \ldots$ eine Basis von $M$, ferner $v_1, v_2, \ldots$ ein System mod $\pi M$ linear unabhängiger Elemente aus $M$ mit $\lim v_j = 0$. Dann gibt es ein Teilsystem $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots$ der $u_i$ so, daß das aus $u_1, u_2, \ldots$ durch Ersetzung der $u_{i_j}$ durch die $v_j$ entstehende Elementsystem eine Basis von $M$ bildet.*

**Beweis.** Gehen wir durch die Abbildung $F$ von $M = \{u_1, u_2, \ldots\}$ zu $M' = \{u'_1, u'_2, \ldots\}$ über, so sind die Elemente $v'_j = F(v_j)$ linear unabhängig, und es ist $\lim v'_j = 0$. Nach dem Hilfssatz können wir nun die $v'_j$ in die Basis $u'_1, u'_2, \ldots$ hineintauschen. Gehen wir nun wieder zu $M$ über, indem wir für jedes stehengebliebene $u'_i$ der konstruierten Basis von $M'$ das $u_i$, für jedes $v'_j$ das $v_j$ nehmen, so ist das so erhaltene Elementsystem eine der Behauptung genügende Basis von $M$.

In Verbindung mit Satz 4 ergibt sich aus Satz 5:

*Jede Basis eines Grundmoduls in $M$ läßt sich zu einer Basis von ganz $M$ erweitern, oder, damit gleichbedeutend: Jeder Grundmodul in $M$ ist direkter Summand von $M$.*

**15.** Der Durchschnitt von beliebig vielen Grundmoduln ist wieder ein solcher. Hingegen braucht eine Summe von Grundmoduln kein Grundmodul zu sein — auch dann nicht, wenn sie direkt ist. Seien z. B. $u_1, u_2$ Basiselemente von $M$. Dann sind $\{u_1\}$ und $\{u_1 + \pi u_2\}$ Grundmoduln, und die Summe $\{u_1\} + \{u_1 + \pi u_2\}$ ist direkt. Die Summe enthält das Element $\pi u_2$, nicht aber $u_2$, ist also kein Grundmodul.

Ist aber umgekehrt $H$ ein Grundmodul, $H_1$ und $H_2$ direkte Summanden von $H$, also $H=H_1+H_2$, so sind $H_1$ und $H_2$ Grundmoduln.

Denn ist $v\in H_1$, und besitzt die Gleichung $\pi x=v$ in $M$ eine Lösung $v'$, so liegt, wegen $v\in H$ und da $H$ Grundmodul ist, $v'$ in $H$, und es gilt

$$v'=v_1'+v_2' \quad (v_1'\in H_1;\ v_2'\in H_2), \quad \pi v'=v=\pi v_1'+\pi v_2'.$$

Wegen $v\in H_1$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt $v=\pi v_1'$, $v_2'=0$, $v'=v_1'\in H_1$, d. h. $H_1$ ist Grundmodul. Entsprechend $H_2$.

Ferner gilt:

(a) *$H_1$ und $M^*$ seien Grundmoduln in $M$ und $H_1\cap M^*=0$, $H_1+M^*=M$. Ferner sei $H_2$ ein Grundmodul in $M^*$. Dann ist $H_1\cap H_2=0$ und $H_1+H_2$ ein Grundmodul in $M$.*

*Beweis.* $H_1\cap H_2=0$ ist klar. Ist $u_1, u_2, \ldots$ eine Basis von $H_1$, $v_1, v_2, \ldots$ eine solche von $M^*$, so bilden die $u_i$ und $v_j$ zusammen eine Basis von $M$. Ist nun $w=w_1+w_2$ $(w_1\in H_1;\ w_2\in H_2)$ ein Element von $H_1+H_2$, für welches die Gleichung $\pi x=w$ in $M$ eine Lösung $z$ hat, und ist

$$w=\sum \varrho_i u_i+\sum \sigma_j v_j,$$

so müssen die $\varrho_i$ und $\sigma_j$ sämtlich durch $\pi$ teilbar sein,

$$\pi\varrho_i^+=\varrho_i, \quad \pi\sigma_i^+=\sigma_i,$$

und es ist

$$z=\sum \varrho_i^+ u_i+\sum \sigma_j^+ v_j=z_1+z_2.$$

$z_1$ liegt als Lösung der Gleichung $\pi x=w_1\in H_1$ in dem Grundmodul $H_1$, ebenso $z_2$ in $M^*$. Da aber $H_2$ Grundmodul in $M^*$ ist und $z_2\in M^*$ die Lösung der Gleichung $\pi x=w_2\in H_2$, so ist $z_2\in H_2$ und also $z=z_1+z_2\in H_1+H_2$, w. z. b. w.

(b) *Seien $H_1, H_2, \ldots$ sowie $M_1, M_2, \ldots$ Grundmoduln in $M$ mit*

$$H_i=\{v_i\},\ \lim v_i=0 \text{ und } M_i+H_i=M_{i-1} \quad (i=1,2,\ldots;\ M_0=M),$$

*wobei die gebildeten Summen direkt sind, und sei $H^+$ der Vereinigungsmodul aller $H_i$, $M^+=\bigcap M_i$. Dann ist*

$$H^+\cap M^+=0,\ H^++M^+=M,$$

*und $H^+$ und $M^+$ sind Grundmoduln in $M$.*

*Beweis.* Sei $F_i=H_1+\cdots+H_i$. Dann ist $M_i+F_i=M$. Die $M_i$ bilden eine absteigende, die $F_i$ eine aufsteigende Modulkette. Sei $w$ ein Element aus $M$. Dann gibt es zu jedem $i$ eine Darstellung $w=y_i+z_i$ $(y_i\in F_i;\ z_i\in M_i)$. Ist dann $y_{i_j}$ eine konvergente Teilfolge der $y_i$, $z_{i_j}$ eine solche der $z_i$, so ist

$$w=\lim y_{i_j}+\lim z_{i_j}\in\{H^+, M^+\}.$$

Daraus folgt

$$M=\{H^+, M^+\}=\{H_1, H_2, \ldots, M^+\}$$

und ebenso, wenn man von $M_i$ statt von $M=M_0$ ausgeht:

$$M_i=\{H_{i+1}, \ldots, M^+\}.$$

Wegen

$$H_i\cap M_i=H_i\cap\{H_{i+1}, \ldots, M^+\}=0$$

und wegen der Konvergenzvoraussetzung folgt in der bei endlichen Gruppen üblichen Weise $H^+\cap M^+=0$, also $M=H^++M^+$. Als direkte Summanden des Grundmoduls $M$ sind $H^+$ und $M^+$ gleichfalls Grundmoduln.

## V. Diagonalmoduln.

**16. Definition.** Der Untermodul $N \subset M$ heißt *Diagonalmodul in* $M$, wenn es eine Basis $v_1, v_2, \ldots$ von $M$ und eine Basis von $N$ gibt von der Form $\omega_1 v_1, \omega_2 v_2, \ldots$, wo $\omega_1$ entweder Null oder eine Potenz $\pi^{v_i} (v_i \geq 0)$ ist. Die Basis $v_1, v_2, \ldots$ heißt dann *Diagonalbasis* von $M$ für $N$.

Ziel des vorliegenden Kapitels ist die Kennzeichung aller Untermoduln von $M$, für welche eine Diagonalbasis existiert.

**Definition.** Sei $N$ ein Untermodul von $M$ und $u_1, u_2, \ldots$ die bei der Definition des Absolutbetrages zugrunde gelegte Basis. Dann ist

$$M_i = \{\pi^i u_1, \pi^{i-1} u_2, \ldots, \pi u_i, u_{i+1}, \ldots\} \qquad (i \geq 0)$$

die Menge aller Elemente $v$ mit $|v| \leq e^{-i}$, und wir setzen $N_i = \{N, M_i\}$ und bezeichnen die absteigende Modulkette

$$N_0 = M \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$$

als die *Abkette von* $N$ (*in* $M$).

Dann ist $M \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ insonderheit die Abkette der Nullgruppe. $N_i \supset M_i$ ist von endlichem Index in $M$, und es gilt $\bigcap N_i = N$, denn für $v \in \bigcap N_i$ gibt es zu jedem $i$ eine Darstellung

$$v = v_i + w_i \quad (v_i \in N,\ w_i \in M_i),$$

und wegen $\lim w_i = 0$ folgt $v = \lim v_i \in N$.

**17. Definition.** $N$ und $L \supset N$ seien Untermoduln von $M$, und $L$ besitze ein Erzeugendensystem $v_1, v_2, \ldots$, so daß alle $v_j$ von endlicher Ordnung mod $N$ sind. Dann heißt $L$ ein *Knotenmodul über* $N$ (*in* $M$). Der größte Knotenmodul über $N$, d. h. der von allen Elementen endlicher Ordnung mod $N$ aus $M$ erzeugte Modul $K \supset N$ heißt *der zu* $N$ (*in* $M$) *gehörige Knotenmodul* oder kurz *der* Knotenmodul von $N$ (in $M$); in Zeichen $K = K(N)$[12].

Ferner setzen wir

$$K^0(N) = N, \quad K^s(N) = K\big(K^{s-1}(N)\big) \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Bei gewöhnlichen Linearformenmoduln endlichen Ranges ist stets $K^1(N) = K^2(N) = \cdots$. In unserem Falle hingegen kann man nur behaupten $K^s(N) \supset K^{s-1}(N)$, und es kann sehr wohl $K^s(N) \neq K^{s-1}(N)$ sein.

*Beispiel.* Es sei $M = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ und $N \subset M$ sei die Menge aller Elemente der Form

$$u = \sigma_0 \pi u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma_i \pi^i - \sigma_0) u_i$$
$$= \sigma_0 \Big(\pi u_0 - \sum_{i=1}^{\infty} u_i\Big) + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \pi^i u_i.$$

Wie man leicht sieht, ist $N$ ein Untermodul von $M$ und es wird $N$ erzeugt von den Elementen $\Big(\pi u_0 - \sum_{i>0} u_i\Big), \pi u_1, \pi^2 u_2, \ldots$. Diese sind sogar linear unabhängig, bilden also eine Basis von $N$, und $K(N)$ enthält wegen $\pi^i u_i \in N$ die Elemente $u_1, u_2, \ldots$, also auch $\sum_{i>0} u_i$. Wegen

$$\pi u_0 - \sum_{i>0} u_i \in N \subset K(N)$$

folgt hieraus $\pi u_0 \in K(N)$. Andererseits ist offenbar $u_0 \notin K(N)$, also $K^2(N) \neq K^1(N)$.

Übrigens gilt $K(N) = N$ offenbar dann und nur dann, wenn $N$ Grundmodul in $M$ ist.

---

[12]) Der Begriff des Knotenmoduls entspricht bei Übergang zur Restklassengruppe $M/N$ genau dem von *Krull*[1]) eingeführten Begriff der Knotengruppe.

**18. Satz 6**[13]. *Ein Untermodul $N$ von $M$ ist dann und nur dann Diagonalmodul in $M$, wenn sein Knotenmodul $K=K(N)$ Grundmodul in $M$ ist.*

Dem Beweis von Satz 6 schicken wir voraus den folgenden, im wesentlichen auf Prüfer[14]) zurückgehenden

**Hilfssatz.** *Sei $N$ ein Untermodul von $M$ und $z=\{v\}$ ein zyklischer Grundmodul in $M$. Das Element $v$ sei von endlicher Ordnung $\pi^r \bmod N$ $(r>0)$. Ferner besitze die Kongruenz*

$$\pi^{s+1}x \equiv \pi^s v \pmod N$$

*für kein $s<r$ in $M$ eine Lösung. Dann gibt es einen Modul $H \subset M$ mit*

$$Z+H=M \text{ und } Z\cap N+H\cap N=N.$$

**Beweis des Hilfssatzes.** $N_0=M\supset N_1\supset N_2\supset\ldots$ sei die Abkette von $N$. Gehen wir nun zum Restklassenmodul $\bar{M}=M/N$ über, dann wird $\Delta\bar{N}_i=\bar{0}$, und $\{\bar{v}\}=\bar{Z}$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung $\pi^r$, für welche keine Gleichung $\pi^{s+1}\bar{x}=\pi^s\bar{v}$ $(s<r)$ in $\bar{M}$ lösbar ist. Daher ist $\pi^r\bar{M}\cap\bar{Z}=\bar{0}$. Wäre nun $\pi^{r-1}\bar{v}\in\{\bar{N}_i, \pi^r\bar{M}\}$ für jedes $i$, so gäbe es für jedes $i$ ein $\bar{x}_i\in\bar{N}_i$ und ein $\bar{y}_i\in\pi^r\bar{M}$ mit $\pi^{r-1}\bar{v}=\bar{x}_i+\bar{y}_i$, und es folgte wegen $\lim\bar{x}_i=\bar{0}$:

$$\pi^{r-1}\bar{v}=\lim\bar{y}_i\in\pi^r\bar{M}$$

im Widerspruch zu $\pi^r\bar{M}\cap\bar{Z}=\bar{0}$. Daher gibt es ein $k$ mit $\pi^{r-1}\bar{v}\notin\{\bar{N}_k, \Pi^r\bar{M}\}=\bar{W}$, und es folgt $\bar{Z}\cap\bar{W}=\bar{0}$. Daher ist $(\bar{W}+\bar{Z})/\bar{W}$ eine zu $\bar{Z}$ isomorphe Untergruppe der Restklassengruppe $\bar{M}/\bar{W}$. Aus der Tatsache, daß $\bar{W}\supset\bar{N}_k$ und also $\bar{M}/\bar{W}$ von endlicher Ordnung ist und wegen $\bar{W}\supset\pi^r\bar{M}$ kein Element der Ordnung $\geq\pi^{r+1}$ enthält, sowie aus der Unzerlegbarkeit der primären zyklichen Gruppe $(\bar{W}+\bar{Z})/\bar{W}$ von der Ordnung $\pi^r$ folgt, daß $(\bar{W}+\bar{Z})\bar{W}$ direkter Summand von $\bar{M}/\bar{W}$ ist:

$$\bar{M}/\bar{W}=(\bar{W}+\bar{Z})/\bar{W}+\bar{H}/\bar{W}$$

und daraus $\bar{M}=\bar{Z}+\bar{H}$.

Hiernach ist $Z\cap N=\{\pi^r v\}$ Grundmodul und damit direkter Summand in dem aus allen Restklassen von $\bar{H}$ bestehenden Modul $H'\subset M$:

$$H'=Z\cap N+H.$$

Daraus folgt $Z\cap H=0$ und $Z+H=\{Z, H'\}=M$. Ist schließlich

$$w=z+v\in N \ (z\in Z,\ v\in H),$$

so folgt beim Übergang zu $\bar{M}$:

$$\bar{0}=\bar{z}+\bar{v}, \text{ also } \bar{z}=\bar{0},\ \bar{v}=\bar{0},\ z\in N,\ v\in N.$$

Hieraus ergibt sich $Z\cap N+H\cap N=N$, wie behauptet.

**19. Beweis von Satz 6.** Erstens: $N$ sei Diagonalmodul, etwa $N=\{\pi^{r_{j_1}}v_{j_1}, \pi^{r_{j_2}}v_{j_2},\ldots\}$. Dann ist offenbar $K(N)=\{v_{j_1}, v_{j_2},\ldots\}$ Grundmodul in $M$.

Zweitens: $K(N)$ sei Grundmodul in $M$. Dann ist $K$ direkter Summand von $M$:

$$M=K+M^+.$$

Wir spalten den uninteressanten Summanden $M^+$ ab und setzen also voraus

$$K(N)=M.$$

---

[13]) Aus Satz 6 folgt bei Übergang zur Restklassengruppe $M/N$ der von *Krull* stammende Zerlegungssatz für kompakte separable Gruppen, denn jede derartige Gruppe ist nach *Krull* [1]), Satz 15 und wegen [4]) als Restklassengruppe $M/N$ eines $\Pi$-Moduls $M$ nach einem Untermodul $N$ darstellbar.

[14]) *H. Prüfer*, Theorie der Abelschen Gruppen. II., Math. Zeitschr. 22 (1925), 222, insbesondere (12).

Nun sei $M_0 = M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ die Abkette des Nullmoduls in $M$ (Nr. 16), also

$$M_i = \{\pi^i u_1, \pi^{i-1} u_2, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots\}.$$

Wir setzen für $j = 1, \ldots, i$

$$F_{ij} = \{u_1, \ldots, u_{j-1}, \pi^{i-j+1} u_j, u_{j+1}, \ldots\}.$$

Dann ist $M_i = \bigcap_j F_{ij}$. Die Moduln

$$F_{11}, F_{21}, F_{22}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, \ldots$$

bezeichnen wir in dieser Reihenfolge mit $F_1, F_2, F_3, \ldots$ Dann gibt es zu jedem $i$ ein $k$, so daß $\bigcap_{j=1}^{k} F_j \subset M_i$.

Angenommen nun, wir hätten bereits die zyklischen Grundmoduln

$$Z^i = \{w^i\} \quad (i = 1, \ldots, j-1)$$

von $M$ abgespalten. Es gilt also:

(a) $$M = Z^1 + \cdots + Z^{j-1} + M^{j-1}.$$

(b) Alle $w^i$ sind von endlicher Ordnung $\pi^{r_i}$ $(r_i \geq 0) \bmod N$, und es ist

$$N = Z^1 \cap N + \cdots + Z^{j-1} \cap N + M^{j-1} \cap N.$$

(c) $$K(M^{j-1} \cap N) = M^{j-1}.$$

(d) Wird zu jedem $i = 1, \ldots, j-1$ der Index $k_i$ so bestimmt, daß

$$F_k \supset M^i \text{ für } k \leq k_i; \quad F_k \not\supset M^i \text{ für } k > k_i,$$

so ist $k_1 < k_2 < \cdots < k_{j-1}$.

Wir setzen noch

$$M^{j-1} \cap N = N^{j-1}$$

und gehen zur Konstruktion von $M^j$ und $N^j$ über:

Sei $k_j = k_{j-1} + 1$. Dann ist $F = M^{j-1} \cap F_{k_j}$ vom Index $\pi$ in $M^{j-1}$. Denn es ist für gewisse natürliche Zahlen $r$ und $s$

$$F_{k_j} = \{u_1, \ldots, u_{r-1}, \pi^s u_r, u_{r+1}, \ldots\} \not\supset M^{j-1},$$

während

$$F^*_{k_j} = \{u_1, \ldots, u_{r-1}, \pi^{s-1} u_r, u_{r+1}, \ldots\}$$

unter den $F_k$ mit $k < k_j$ vorkommt und also $M^{j-1}$ umfaßt. Also ist für eine geeignete Basis $v_1, v_2, \ldots$ von $M^{j-1}$

$$F = \{\pi v_1, v_2, v_3, \ldots\}.$$

Wir suchen nun unter den Elementen von der Form

(*) $$w = v_1 + \sum_{k>1} \sigma_k v_k$$

ein solches von minimaler Ordnung $\bmod N^{j-1}$, nennen es $w^j$ und setzen $Z^j = \{w^j\}$.

Im Falle $w^j \in N^{j-1}$ setzen wir ferner $M^j = \{v_2, v_3, \ldots\}$. Dann sind jedenfalls $Z^j$ und $M^j$ Grundmoduln in $M^{j-1}$ mit $Z^j = M^j + M^{j-1}$, und es ist $M^j \subset F \subset F_{k_j}$. Dann sind die obigen Bedingungen (a), (b), (d) auch für $j$ erfüllt. (c) wird später nachgewiesen.

Sei nun $w^j \notin N^{j-1}$. Jedenfalls ist $w^j$ von endlicher Ordnung $\pi^r \bmod N^{j-1}$; denn gäbe es kein Element der Form (*) von endlicher Ordnung $\bmod N^{j-1}$, so läge $K(N^{j-1})$ bereits in dem von allen Elementen der Form $\sum_k \sigma_k v_k$ mit $\sigma_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$ gebildeten Modul, im Widerspruch zu (c). Wegen $w^j \notin N^{j-1}$ und da $w^j$ von minimaler Ordnung $\bmod N^{j-1}$

ist, liegt kein Element der Form $(*)$ in $N^{j-1}$, und daraus folgt $N^{j-1} \subset F$. Daher und wegen

$$F = \{\pi w^j, v_2, v_3, \ldots\}$$

können wir im Falle $\pi w^j \in N^{j-1}$ ebenfalls $M^{j-1} = \{v_2, v_3, \ldots\}$ setzen. Der Nachweis von (a), (b) und (d) erfolgt dann ebenso wie oben im Falle $w^j \in N^{j-1}$.

Sei nun $\pi w^j \notin N^{j-1}$ und $\pi^{r-1}$ $(r \geq 2)$ die Ordnung mod $N^{j-1}$ von $v' = \pi w^j$. Gäbe es dann ein $u \in F$ mit

$$\pi^{s+1} u \equiv \pi^s v' \pmod{N^{j-1}} \quad (s < r-1),$$

so wäre

$$\pi^{s+1} u - \pi^{s+1} w^j = \pi^{s+1}(u - w^j) \in N^{j-1}.$$

Aber $u - w^j$ ist offenbar von der Form $(*)$ und von einer Ordnung $\leq \pi^{s+1} < \pi^r$ mod $N^{j-1}$ im Widerspruch zu der Minimaleigenschaft von $w^j$.

Mithin sind die Voraussetzungen des vorausgeschickten Hilfssatzes für $v'$ und $F$ erfüllt, und es folgt die Existenz eines Moduls $M^j \subset F \subset F_{k_j}$ mit

$$\{v'\} + M^j = F \text{ und } \{v'\} \cap N^{j-1} + M^j \cap N^{j-1} = N^{j-1}.$$

Daraus folgt aber sofort

$$\{w^j\} + M^j = M^{j-1} \text{ und } \{w^j\} \cap N^{j-1} + M^j \cap N^{j-1} = N^{j-1}.$$

Damit sind wieder (a), (b), (d) für $j$ erfüllt, und es bleibt nachzuweisen, daß auch (c) für $M^j$ und $N^j$ $M^j \cap N^{j-1}$ erfüllt ist, d. h. daß $K(N^j) = M^j$.

Ist nun $z \in M^j \subset M^{j-1}$, so ist $z$ wegen $K(N^{j-1}) = M^{j-1}$ als Limes einer Folge $z_1, z_2, \ldots$ aus $M^{j-1}$ darstellbar, wo die $z_k$ sämtlich von endlicher Ordnung mod $N^{j-1}$ sind. Ist also $u_2, u_3, \ldots$ eine Basis von $M^j$ und also $w^j, u_2, u_3, \ldots$ eine Basis von $M^{j-1}$ und ist

$$z = \sum_{i>1} \sigma_i u_i \in M^j, \quad z_k = \varrho_{k1} w^j + \sum_{i>1} \varrho_{ki} u_i \in M^{j-1},$$

so folgt

$$0 = \lim (z_k - z) = \lim_k \varrho_{k1} w^j + \lim_k \sum_{i>1} (\varrho_{ki} - \sigma_i) u_i,$$

also

$$\lim \varrho_{k1} = 0 \text{ und } \lim_k \sum_{i>1} (\varrho_{ki} - \sigma_i) u_i = 0,$$

also

$$\lim_k \sum_{i>1} \varrho_{ki} u_i = \sum_{i>1} \sigma_i u_i = z.$$

Setzen wir $x_k = \sum_{i>1} \varrho_{ki} u_i \in M^j$, so ist also $z = \lim x_k$. Andererseits ist $z_k - x_k = \varrho_{k1} w^j$, und da wegen $\lim \varrho_{k1} = 0$ für alle hinreichend großen $k$ die Kongruenz $\varrho_{k1} \equiv 0 \pmod{\pi^r}$ gilt, liegen fast alle $x_k$ in derselben Restklasse mod $N^{j-1}$ wie die entsprechenden $z_k$, sind also mit diesen von endlicher Ordnung mod $N^{j-1}$, also wegen $x_k \in M^j$ und $M^j \cap N^{j-1} = N^j$ auch von endlicher Ordnung mod $N^j$. Jedes Element $z \in M^j$ ist also als Limes einer Folge von Elementen $x_k \in M^j$ darstellbar, die von endlicher Ordnung mod $N^j$ sind, und daraus folgt $K(N^j) = M^j$.

Damit ist unsere Induktion fertig, und wir haben für die abgespaltenen Elemente $w^j$ nur noch zu zeigen: $\lim w^j = 0$. Nun ist aber $w^j \in M^{j-1} \subset F_{k_{j-1}}$, und wegen $\lim k_{j-1} = \infty$ und nach Konstruktion der $F_k$ liegt $M^{j-1}$ und damit $w^j$ für jedes $i$ und hinreichend großes $j = j(i)$ in $M_i$. Hieraus folgt $\lim w^j = 0$ und damit die Konvergenz unseres Verfahrens. Wir haben also für $M$ eine Diagonalbasis über $N$ konstruiert.

Lassen wir die anfangs gemachte Voraussetzung $K(N) = M$ fallen und nehmen wir gemäß der Gleichung $M = K(N) + M^+$ zu einer Diagonalbasis von $K(N)$ über $N$ noch eine beliebige Basis von $M^+$ hinzu und setzen die entsprechenden $\omega_i = 0$, so ist unsere Konstruktion vollständig und der Beweis in allen Teilen erbracht.

Satz 6 zeigt in Verbindung mit dem Beispiel am Anfang dieser Nummer die Existenz von Untermoduln von $M$, die nicht Diagonalmodul in $M$ sind.

**20.** Die Anzahl der Basiselemente von $M^+$, d. h. die Anzahl der $\omega_i$ mit $\omega_i = 0$ sei $n^+$. Ferner sei $n_j$ die Anzahl der $\omega_i$ mit $\omega_i = \pi^j$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Man zeigt nun in der üblichen Weise durch invariante Deutung [15]), daß die Zahlen $n^+$, $n_j$ nicht von der oben konstruierten speziellen Diagonalbasis abhängen, sondern für jede Diagonalbasis von $M$ für $N$ dieselben sind. Wir bezeichnen daher $n^+$, $n_j$ als das Invariantensystem von $N$ in $M$. Ist speziell $N$ Grundmodul in $M$, so ist $n_j = 0$ für $j \neq 0$, und es genügt die Angabe von $n^+$, $n_0$, während im Falle $K(N) = M$ die Anzahl $n^+ = 0$ ist.

**Definition.** Zwei Untermoduln $N_1$ und $N_2$ von $M$ heißen *äquivalent* (*in* $M$), wenn sie durch eine invertierbare lineare Transformation von $M$ ineinander überführt werden können.

**Satz 7.** *Zwei Diagonalmoduln $N_1$ und $N_2$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie dasselbe Invariantensystem haben.*

Beweis trivial.

---

[15]) Genau die gleichen Überlegungen wie bei *Krull* [1]), Anm. 49.

---

Eingegangen am 24. Juli 1950.

# Sur les éléments de contact linéaires du second ordre attachés à un système différentiel.

Par *G. Reeb* à Strasbourg.

## Introduction.

Soit $V_n$ une variété compacte orientable à $n$ dimensions de classe $G_4$ (c'est-à-dire quatre fois continûment différentiable), douée d'une structure d'espace de Riemann (ou de Finsler). Parmi les éléments de contact[1]) linéaires du second ordre attachés à $V_n$ on peut distinguer ceux qui sont géodésiques pour la structure envisagée.

En utilisant certaines propriétés de l'invariant intégral de M. Elie Cartan, nous montrerons que parmi les éléments de contact du second ordre attachés aux lignes intégrales d'une équation de Pfaff $\omega = 0$, définie dans $V_n$, il y a certainement des éléments de contact géodésiques.

## I. Rappel de certaines propriétés de l'invariant intégral de Élie Cartan.

Soit $V_n$, comme ci-dessus, une variété compacte orientable de classe $G_4$ et de dimension $n$. Soit $V_{2n}^*$ la variété de classe $G_3$ et de dimension $2n$ des formes linéaires tangentes à $V_n$. La variété $V_{2n}$ est une variété fibrée de fibre $R^n$ et de base $V_n$; la projection canonique de $V_{2n}$ sur $V_n$ sera désignée par $P$. La forme $\omega$ définie dans l'espace tangent en $x$ à $V_n$ sera désignée par $(x, \omega)$; on a visiblement $(x, \omega) \in P^{-1}(x)$.

A un système de coordonnées locales $x^i$ dans $V_n$ correspond de façon canonique un système de coordonnées locales $(p_i, x_i)$ dans $V_{2n}^*$, tel que le point $(p_i, x_i) \in V_{2n}$ soit précisément la forme $p_i dx_i$ attachée au point $(x_i)$.

Sur $V_{2n}$ on peut définir canoniquement une forme de Pfaff $\Theta$ (de classe $G_3$) dont la restriction $\Theta(x, \omega)$ à l'espace vectoriel tangent en $(x, \omega)$ à $V_{2n}$ est:

$$\Theta(x, \omega) = P^*(\omega) \tag{1}$$

où $P^*$ désigne l'application transposée de $P$. A l'aide des coordonnées locales $p_i$, $x_i$ la forme $\Theta$ s'écrit ainsi:

$$\Theta = p_i dx_i. \tag{2}$$

De plus on a la relation:

$$(d\Theta)^n \neq 0 \text{ en tout point de } V_{2n}. \tag{3}$$

[1]) Si l'ordre d'un élément de contact n'est pas précisé dans le texte il est entendu qu'il s'agit d'un élément du premier ordre. Linéaire est synonyme de »de dimension une«. Soit $V$ la variété des directions $(x, t)$ tangentes à $V_n$. L'élément de contact linéaire $s$ de $V$ attaché à $(x, t)$ définit un élément de contact du second ordre de $V_n$ si, et seulement si, la projection de $s$ sur $V_n$ est identique à $t$.

Supposons maintenant que $V_n$ soit munie d'une structure de variété de Finsler. Désignons dans ces conditions par $V_{2n}$ la variété fibrée des vecteurs tangents à $V_n$, et par $p$ la projection canonique de $V_{2n}$ sur $V_n$; le vecteur $u$ tangent en $x$ à $V_n$ sera désigné par $(x, u)$. La donnée de la métrique Finslérienne est équivalente à la donnée d'une fonction $F(x, u)$ de classe $G_3$ sur $V_{2n}$ vérifiant les propriétés suivantes:

$\alpha$) $F(x, u)$ est, pour $x$ fixé, une fonction positivement homogène de degré un en $u$.

$\beta$) La différentielle $dF$ de $F$ est de rang 1 en tout point, et l'équation $dF=0$ peut être résolue (localement) par rapport à l'une des coordonnées $du_i$ de $du$.

$\gamma$) L'équation $F(x, u)=1$ définit, pour $x$ fixé, une sous-variété convexe et compacte de $p^{-1}(x)$.

La sous-variété $V_{2n-1}$ de $V_{2n}$ définie par l'équation

$$F(x, u)=1 \tag{4}$$

est une variété compacte, fibrée en sphères $S_{n-1}$ (à $n-1$ dimensions), de base $V_n$; la projection canonique $p'$ de $V_{2n-1}$ sur $V_n$ est simplement la restriction de $p$ à $V_{2n-1}$.

A $V_{2n-1}$ on peut associer une sous-variété $V^*_{2n-1}$ de $V^*_{2n}$ de la façon suivante: au vecteur $(x, u) \in V_{2n-1}$ on associe l'élément $(x, \omega)$ de $V^*_{2n}$, où $\omega$ est ainsi défini:

$$\omega = d_u F(x, u). \tag{5}$$

Ici $d_u$ désigne une différentiation partielle par rapport à $u$, le point $x$ étant fixé.

Moyennant les hypothèses $\alpha$), $\beta$) et $\gamma$) faites sur $F$, on vérifie que la correspondance

$$\varphi: \quad (x, u) \to (x, \omega)$$

ci-dessus définie est un homéomorphisme de classe $G_2$ de $V_{2n-1}$ dans $V^*_{2n}$. La sous-variété $V^*_{2n-1} = \varphi(V_{2n-1})$ de $V^*_{2n}$ vérifie les propriétés suivantes:

1°. $V^*_{2n-1}$ est une variété compacte convexe.

2° $V^*_{2n-1}$ est de classe $G_2$.

3°. L'espace tangent $E_{2n-1,y}$ en $y$ à $V_{2n-1}$ est en position générale, c'est-à-dire que dimension $\big(P(E_{2n-1,y})\big) = n$.

La forme $d\Theta^*$ induite par $d\Theta$ dans $V^*_{2n-1}$ vérifie par suite les deux propriétés que voici (dont l'une (b) est une conséquence de l'autre (a)):

(a) $(d\Theta^*)^{n-1} \neq 0$ en tout point de $V^*_{2n-1}$.

(b) Le système différentiel $(\Sigma)$ caractéristique de $(d\Theta^*)^{n-1}=0$ [2]) est un système différentiel ordinaire à $2(n-1)$ équations et $2n-1$ variables.

La forme $d\Theta^*$ est l'invariant intégral de Élie Cartan attaché à $(\Sigma)$, et $(\Sigma)$ est le système différentiel des géodésiques de $V_n$. De plus l'application $\varphi$ de $V_{2n-1}$ sur $V^*_{2n-1}$, définie ci-dessus, permet d'identifier canoniquement les directions orientées de vecteurs attachées à $V_n$ et les directions orientées de formes attachées à $V_n$.

**Définition 1.** Désignons par $E_1$ le champ de directions de vecteurs défini dans $V^*_{2n-1}$ par les deux conditions suivantes:

1°. Le champ $E_1$ vérifie le système différentiel $(\Sigma)$ caractéristique de $(d\Theta^*)^{n-1}=0$.

2°. Si $E_1(x, \omega)$ est la direction de $E_1$ attachée à $(x, \omega)$ on a $P\big(E_1(x, \omega)\big) = \omega$. (Remarquer que $\omega$ est identifié à une direction de vecteurs attachée en $x$ à $V_n$.)

Les éléments du champ $E_1$ sont des éléments de contact du second ordre de dimension un et orientés attachés à $V_n$. Pour des raisons évidentes on dira que ce sont les éléments de contact géodésiques de $V_n$.

---

[2]) *Élie Cartan*, Les systèmes différentiels extérieurs, p. 52. Paris, Hermann, 1945.

## II. Applications.

**Définition 2.** Soit $W_{2(n-1)}$ une variété compacte orientée à $2(n-1)$ dimensions de classe $G_2$, ayant éventuellement un bord $W_{2n-3}$. Soit $f$ une application de rang $2(n-1)$ et de classe $G_2$ qui plonge $W_{2(n-1)}$ dans $V^*_{2n-1}$. La variété plongée $(f, W_{2(n-1)})$ est transversale du champ $E_1$ (définition 1) si en tout point $f(x)$ (où $x \in W_{2n-1}$) la direction du champ $E_1$ n'est pas contenue dans l'élément de contact tangent en $x$ à $f(W_{2(n-1)})$.

On peut dès lors démontrer:

**Théorème 1.** *Si $(f, W_{2(n-1)})$ est une variété plongée dans $V^*_{2n-1}$ [où comme dans la définition 2, l'application $f$ est de rang $2(n-1)$ et de classe $G_2$ et où $W_{2(n-1)}$ est compacte, de classe $G_2$, et a éventuellement un bord $W_{2n-3}$], et si de plus $Pf(W_{2n-3})$ est un ensemble discret (et par conséquent fini), alors:*

1°. *le champ $E_1$ (définition 1) est tangent à $f(W_{2(n-1)})$ en des points $x$ non situés sur le bord $W_{2n-3}$ de $W_{2(n-1)}$;*

2°. *l'ensemble $E$ de ces points de contact $x$ est fermé; son complémentaire n'est pas connexe.*

*En particulier $(f, W_{2(n-1)})$ ne saurait être transversale au champ $E_1$ (définition 2).*

La démonstration du théorème 1 est immédiate: En effet supposons que la conclusion de ce théorème soit fausse, c'est-à-dire que:

$$\int_{W_{2(n-1)}} f^*\big((d\Theta^*)^{n-1}\big) \neq 0 \tag{6}$$

($f^*$ désigne l'application transposée de $f$).

Par suite des hypothèses sur $W_{2n-3}$ on peut écrire:

$$\int_{W_{2n-3}} f^*\big[\Theta^* \wedge (d\Theta^*)^{n-2}\big] = 0, \tag{7}$$

car $f^*\big(\Theta^* \wedge (d\Theta^*)^{n-2}\big) = 0$ sur $W_{2n-3}$.

Or les formules (6) et (7) sont incompatibles d'après le théorème de Stokes.

Le théorème 1 entraîne le lemme suivant:

**Lemme 1.** *Les hypothèses et les notations étant celles du théorème 1, désignons par $\Gamma$ la famille des éléments de contact du second ordre (orientés) de dimension 1 attachés à $V_n$ qui sont en même temps des images par $f$ d'éléments de contact (orientés) de dimension 1 attachés à $W_{2(n-1)}$. Dans ces conditions la famille $\Gamma$ contient des éléments de contact géodésiques formant une famille $\Gamma'$. De plus les points d'appui des éléments de $f^{-1}(\Gamma')$ forment un ensemble fermé de $W_{2(n-1)}$ dont le complémentaire n'est pas connexe.*

**Définition 3.** Si $E_{n-1}$ est un champ sans singularités d'éléments de contact (non orientés) de dimension $n-1$ et de classe $G_2$ défini sur $V_n$, désignons par $W_{2(n-1)}$ la variété des élément de contact orientés de dimension 1 contenus dans $E_{n-1}$. Par $f$ on désignera l'application canonique de $W_{2(n-1)}$ dans $V^*_{2n-1}$. (Remarquer que l'application définie par (5) permet d'associer à tout élément de $W_{2(n-1)}$ de façon canonique un élément de $V^*_{2n-1}$; c'est cette application que nous désignons par $f$.)

Le couple $(f, W_{2(n-1)})$ vérifie les hypothèses du lemme 1. Pour les applications que nous avons en vue le champ $E_1$ peut admettre des singularités du type usuel; à cet effet nous posons plus généralement:

**Définition 4.** Soit $E_{n-1}$ un champ d'éléments de contact (non-orientés) de dimension $n-1$ et de classe $G_2$ sur $V_n$, admettant éventuellement des singularités isolées (et par suite en nombre fini). Il peut se faire que l'ensemble $W_{2(n-1)}$ des éléments de contact orientés et de dimension 1 contenus dans $E_{n-1}$ soit une variété (avec un bord) qui vérifie

avec l'application canonique $f$ de $W_{2(n-1)}$ dans $V^*_{2n-1}$ les hypothèses du lemme 1. On dira dans ces conditions que le champ $E_{n-1}$ est régulier.

Le lemme 1 permet d'énoncer:

**Théorème 2.** *Soit $E_{n-1}$ un champ régulier (cf. définitions 3 et 4) et soit $\Phi$ la famille des éléments de contact linéaires orientés du second ordre attachés à $V_n$ aux lignes intégrales de $E_{n-1}$. La famille $\Phi$ contient une sous-famille non vide d'éléments de contact géodésiques (cf. définition 1).*

## III. Examen de quelques cas particuliers.

Considérons d'abord le cas où $n=2$. Convenons de dire qu'un point d'une courbe $\gamma$ de classe $G_2$ tracée dans $V_2$ est un point de courbure géodésique nulle, ou est un point d'inflexion géodésique de $\gamma$, si la courbe $\gamma$ admet en ce point un contact du second ordre avec la géodésique qui lui est tangente. On peut donc énoncer la propriété suivante:

Parmi les trajectoires d'un champ de vecteurs régulier $E_1$ (cf. définition 4) défini sur $V_2$ il y en a qui ont des points d'inflexion géodésique. L'ensemble de ces points d'inflexion géodésique est un ensemble fermé dont le complémentaire n'est pas connexe.

Si par contre on envisage le cas où $n$ est quelconque, il convient d'examiner spécialement le cas d'un champ $E_{n-1}$ complètement intégrable.

Un élément de contact linéaire géodésique (pour $V_n$) attaché à une sous-variété $V_{n-1}$ de $V_n$ définit une direction sur $V_{n-1}$ qu'il est naturel d'appeler direction asymptotique.

Les variétés intégrales (ou feuilles) d'un champ $E_{n-1}$ régulier et complètement intégrable possèdent donc nécessairement des directions asymptotiques réelles. (On peut même dire en gros qu'il y a $\infty^{2n-3}$ directions asymptotiques réelles.)

Finalement il y a lieu de remarquer que si $V_n$ est une variété de Riemann, la forme $(d\bar{\Theta}^*)^{n-1}$ induite par $(d\Theta^*)^{n-1}$ dans $W_{2(n-1)}$ admet une interprétation géométrique très simple qui permettrait d'exposer autrement les résultats précédents. Nous allons montrer ceci à l'aide d'un cas très particulier:

Supposons que $n=2$, et soit $V_2$ le tore à deux dimensions muni d'une structure de variété de Riemann. Soit $e_1$ un champ de vecteurs unitaires de classe $G_2$ sur $V_2$, et soit $e_2$ un deuxième champ de vecteurs unitaires tel qu'en tout point $x$ de $V_2$ on ait $(e_1, e_2)=\frac{\pi}{2}$. Soient $\omega_1$, $\omega_2$, et $\omega_{12}$ les formes de Pfaff donnant le déplacement infinitésimal du repère $[x, e_1, e_2]$. On a visiblement les relations suivantes:

$$0=\int_{V_2} d\omega_1=\int_{V_2}\omega_{12}\wedge\omega_2 \qquad (\text{car } d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2)$$

or $\omega_{12}=\varrho_1\omega_1+\varrho_2\omega_2$, donc

$$\int_{V_2}\varrho_1\omega_1\wedge\omega_2=0,$$

donc $\varrho_1$ s'annule nécessairement sur $V_2$. Mais $\varrho_1$ n'est pas autre chose que la courbure géodésique de la trajectoire du champ $e_1$ au point considéré. L'expression $d\omega_1$, d'autre part, est identique à $d\Theta^*$.

---

Eingegangen am 5. August 1950.

# Omission dans les listes de Norton pour les carrés 7·7.

Par *Albert Sade* à Marseille.

**1.** On connaît le problème des carrés latins (ensemble de $n$ permutations 2 à 2 discordantes des éléments $1,2,\ldots,n$) abordé pour la 1ère fois par Euler [1]. Aubry [7] assure qu'ils étaient connus avant Euler, mais ne donne aucune référence. Si la 1ère ligne et la 1ère colonne sont dans l'ordre naturel, le carré est dit *réduit*. Le nombre des carrés réduits du 5° ordre, soit 56, a été calculé par Euler [1], puis par MacMahon [6]. La méthode de ce dernier, fondée sur les fonctions symétriques, est tellement compliquée que l'auteur lui-même se trompe en l'appliquant et trouve 52 au lieu de 56. Schönhardt [8, p. 218] dit avoir utilisé la méthode de MacMahon et avoir trouvé les résultats corrects pour $n=5$ et 6. D'après Schumacher [2], Clausen rapportait tous les cas possibles pour $n=6$ à 17 formes fondamentales. Frolov [3] donne le premier l'effectif 9408 pour le 6° ordre, mais sans aucune justification. Tarry [5] confirme le résultat de Clausen. Schönhardt [8] groupant les carrés en *Grundklassen* d'après les transformations (locomotion de lignes et de colonnes (Sprague [4]), substitution des éléments, symétries, etc.) qui les laissent invariants, confirme les résultats de Clausen et de Frolov. Mais Jacob [9], énumérant les carrés du 6° ordre en fonction de la substitution liant les deux premiéres lignes, en trouve seulement 8192 (p. 352). Fisher et Yates [10] classent les carrés d'après leur diagonale et retrouvent 9408 carrés, pour $n=6$ (p. 507). En [13], j'explique le désaccord entre Frolov et Jacob par une erreur de ce dernier dans le nombre des substitutions semblables à une substitution donnée.

**2.** Frolov [3] avait donné pour le 7° ordre l'effectif 221 276 160. Fisher et Yates [10] avaient conjecturé 250 millions. En 1939, Norton [11] imitant les procédés de Schönhardt, ramène les carrés du 7° ordre à 146 espèces et trouve 16 927 968 carrés. Sa méthode n'est pas exhaustive.

En [14], je classe, pour $n=7$, les carrés d'après la nature partitionnelle des substitutions liant la 1ère ligne aux 2ème, 3me, et 4me, et trouve (No. 20) 16 942 080 carrés, soit 14 112 de plus que Norton. Je suggère une explication de nature à sauvegarder les conjectures de ce dernier (No. 21). Mais R. A. Fisher [15] m'ayant averti que „*le désaccord ne pouvait être supprimé par cette voie*", et la méthode [14] étant exhaustive, il fallait imputer l'écart à une omission.

**3.** Or une 147° espèce, engendrant 14 112 carrés, ne pouvait provenir que d'un type automorphe par un opérateur d'ordre $5k$. Il était facile de construire une matrice, $Q$, répondant à un tel opérateur, par exemple: $T=(34567)^3$, le cycle (34567) s'interprétant comme une locomotion [4] des colonnes, une locomotion des lignes, une substitution des éléments.

Les deux premières rangées de $Q$ sont symétriques par rapport à la diagonale et définissent la substitution: (12) (34567). Dans le carré 5·5 restant les éléments des diagonales brisées se succèdent dans l'ordre cyclique naturel, excepté les chiffres 1 et 2, qui forment chacun une diagonale brisée.

**4.** Voici ce carré:

$$Q = \begin{matrix} 1234567 \\ 2145673 \\ 3457126 \\ 4576312 \\ 5623741 \\ 6712435 \\ 7361254 \end{matrix} \qquad R = \begin{matrix} 1256734 \\ 2167345 \\ 3715462 \\ 4321657 \\ 5432176 \\ 6574213 \\ 7643521 \end{matrix}$$

**5.** Si l'on remplace chaque ligne de $Q$ par la permutation conjugée et si l'on rabat la figure autour de la diagonale, on obtient $R$ tel que:

$$R \cdot (12.36475)\,(12.34567) = Q,$$

le 1er facteur étant une locomotion des colonnes, le 2e une substitution des chiffres. Le déplacement du 3me ordre qui fait coïncider $Q$ et $R$ est donc réalisable par l'opérateur: (12.36475) (12.34567) défini ci-dessus. Par suite, le nombre des carrés réduits engendrés par $Q$ est:

$$6 \cdot (7!)^3/(3 \cdot 5 \cdot 7!\,6!) = 14\,112,$$

ce qui est précisément l'écart signalé au No. 2.

**6.** Le renversement de *l'intercalate* unique 1,2 (*cycle binome dans la substitution qui lie deux rangées parallèles*) dans $Q$ donne un carré $S$, isomorphe à $Q$ et coïncidant avec $Q$ par symétrie autour de la diagonale, puis transposition des chiffres 1 et 2. $S$ fait donc partie des 14112 carrés dénombrés au No. **5** et ne donne pas d'espéce nouvelle. Ainsi la conjecture [11, p. 291] „*that they be enumerated by an exhaustive reversal of intercalates*" n'est pas vérifiée, du moins pour les intercalates simples. Cette supposition était fondée sur la classification des carrés 6·6. Il était à prévoir que celle-ci deviendrait plus complexe avec les ordres supérieurs.

**7.** Par contre, la conclusion de Ghurye [12] est confirmée, car le carré $Q$ possède un „*IA*" différent de ceux des autres espèces.

Marseille, Mars 1950.

**Citations.**


[1] *Leonard Euler*, Opera omnia **7** (1779), 291—392.
[2] *Schumacher*, Briefwechsel Gauss-Schumacher, IV, Altona, Nr. 782 (1842), 81.
[3] *Michel Frolov*, Journ. Math. Spec. (3) **4** (1890), 8—11; 25—30.
[4] *T. B. Sprague*, Edinb. Trans. **37** (1892), 399—411.
[5] *G. Tarry*, Mem. Soc. sci. Liège (3) **2** (1900).
[6] *P. A. MacMahon*, Comb. Analysis I (1915), 249—263.
[7] *A. Aubry*, Enseignement Math. **19** (1917), 284.
[8] *Erich Schönhardt*, Journ. reine angew. Math. **163** (1930), 183—230.
[9] *S. M. Jacob*, Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), 329—354.
[10] *R. A. Fisher, Yates*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **30** (1934), 492—507.
[11] *H. W. Norton*, Annals Eugenics **9** (1939), 269—307.
[12] *S. G. Ghurye*, Id. **14**, 2° Part (1948), 133.
[13] *Al. Sade*, Énumération des carrés Latins 6·6, Marseille (1948).
[14] *Al. Sade*, Idem 7·7, Marseille (1948).
[15] *R. A. Fisher*, Lettre à l'auteur du 15 Mars 1949.


Eingegangen am 22. Mai 1950.

# Eine Rekursionsformel der Faberschen Polynome.

Von *Horst Tietz* in Marburg.

Mit der vorliegenden Note soll eine Unstimmigkeit beseitigt werden, die in der von Herrn Faber[1]) angegebenen Rekursionsformel[2]) für seine Polynome enthalten ist. Hierzu gibt eine Bemerkung von ihm an anderer Stelle[3]) die Möglichkeit.

Der nicht konstanten Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \tag{8}$$ [4])

sind die Faberschen Polynome $P_\nu(x)$ zugeordnet als Koeffizienten von $t^{\nu-1}$ in der Entwicklung von

$$\frac{1}{t} - \frac{d}{dt}\log\big(1 + t\,\mathfrak{P}(t) - t\,x\big). \tag{20}$$

Zu $P_\nu(x)$ liefern also nur die Potenzen $t^n$ in $\mathfrak{P}(t)$ einen Beitrag, für die $n < \nu$ ist. Betrachtet man bei festem $k$ nur die $P_\nu(x)$ mit $\nu \leq k+1$, so darf man daher in (20) das Argument des Logarithmus ersetzen durch das Polynom

$$1 + (a_0 - x)\,t + a_1 t^2 + \cdots + a_k t^{k+1}. \tag{A}$$

Es folgt $P_0(x) = 1$ und — genau wie Formel (21) bei Herrn Faber —

$$P_\nu(x) = \sum_{i=1}^{j+1} \frac{1}{t_i^\nu(x)} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, k+1,$$

wenn $a_j$ der höchste nicht verschwindende Koeffizient und $a_j \prod_{i=1}^{j+1} \big(t - t_i(x)\big)$ die Faktorzerlegung von (A) ist.

Das Polynom $P_\nu(x)$ ist also gleich der $(-\nu)$-ten Potenzsumme der Wurzeln von

$$1 + (a_0 - x)\,t + a_1 t^2 + \cdots + a_j t^{j+1},$$

somit gleich der $\nu$-ten Potenzsumme der Wurzeln von

$$u^{j+1} + (a_0 - x)\,u^j + a_1 u^{j-1} + \cdots + a_j,$$

und schließlich, indem $k - j$ verschwindende Wurzeln hinzugefügt werden, gleich der $\nu$-ten Potenzsumme der Wurzeln von

$$u^{k+1} + (a_0 - x)\,u^k + a_1 u^{k-1} + \cdots + a_k.$$

Zwischen den Potenzsummen $P_\nu(x)$ und den Koeffizienten dieses Polynoms besteht aber die allgemeine Beziehung

$$P_{k+1}(x) + (a_0 - x)\,P_k(x) + a_1 P_{k-1}(x) + \cdots + a_{k-1} P_1(x) + (k+1)\,a_k = 0.$$

Dies ist die gesuchte Rekursionsformel.

[1]) *G. Faber*, Über Tschebyscheffsche Polynome. Journal f. r. u. a. Math. **150** (1920), S. 79—106.

[2]) l. c. S. 83, Formel (15).

[3]) l. c. S. 84, letzter Absatz von § 2.

[4]) Numerierung wie in der zitierten Arbeit.

Eingegangen am 15. Januar 1951.

# Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. II.

## Nichtarchimedisch perfekt bewertete, operatorreduzierte Linearformenmoduln.

Von *Heinz Schöneborn* in Bonn.

In der vorliegenden Arbeit werden Linearformenmoduln untersucht, die nach dem Vorbild der Bewertungstheorie topologisiert sind und deren Elemente also einen vollständigen, metrischen topologischen Raum bilden, der im allgemeinen weder kompakt noch lokalkompakt noch bikompakt noch lokalbikompakt zu sein braucht.

Es besteht ein enger Zusammenhang mit den Untersuchungen von W. Krull[1]) über perfekte, separable abelsche Gruppen, und zwar sind die Restklassengruppen des hier betrachteten Moduls identisch mit den aus Elementen von unendlicher Höhe bestehenden Gruppen Krulls. Jedoch sind die hier verwendeten Methoden und die einzelnen Ergebnisse von den Krullschen völlig verschieden. Krull untersucht mit allgemein gruppentheoretischen Methoden die Frage der zyklisch direkten Zerlegbarkeit, während in der vorliegenden Arbeit aus der linearen Algebra übernommene Gesichtspunkte im Vordergrund stehen. — In Kap. I wird ein nichtarchimedisch perfekt bewerteter Linearformenmodul $M$ über einem beliebigen Grundkörper konstruiert und gezeigt, daß sich $M$ weitgehend analog einem gewöhnlichen Linearformenmodul über einem Körper verhält. In Kap. II wird durch Spezialisierung des Grundkörpers zum Körper der $\pi$-adischen Zahlen ($\pi$ ganzrationale Primzahl), Einschränkung des Multiplikatorenbereiches auf den Ring der ganzen $\pi$-adischen Zahlen (operatorreduziert!) und Verschärfung der Topologie der den Hauptgegenstand unserer Untersuchung bildende operatorreduzierte Linearformenmodul $R$ gebildet.

In Teil I dieser Arbeit[2]) habe ich bewertete Linearformenmoduln $G$ untersucht, die vom Standpunkt der Topologie kompakt und separabel sind und deren Restklassengruppen mit den nur Elemente endlicher Höhe enthaltenden Krullschen Gruppen zusammenfallen. Der in[2]) untersuchte Modul $G$ erweist sich nun als Untermodul des hier betrachteten Moduls $R$. — In Kap. II wird die Konvergenz in $R$ auf die in $M$ und $G$ zurückgeführt (Satz 5) und anschließend ein für das Rechnen in $R$ grundlegender Grenzwertvertauschungssatz (Satz 6) bewiesen. Hinsichtlich der Untermoduln von $R$ wird gezeigt, daß jeder Untermodul $S$ direkte Summe ist von Untermoduln $N$ und $L$, wo $N$ gleichzeitig

[1]) *W. Krull*, Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen, Journ. f. Math. 184 (1942), 19.

[2]) *H. Schöneborn*, Über Linearformenmoduln unendlichen Ranges. I. (Dissertation Bonn 1949), Journ. f. Math. 189 (1951), 168—185.

direkter Summand von $R$ ist (Satz 7):

$$R = N + N', \quad S = N + L \quad (L = S \cap N').$$

Der andere Summand $L$ ist kompakt von dem in [2]) untersuchten Typus und in leicht zu übersehender Weise in $N'$ eingebettet (Satz 8). Aus diesen Bemerkungen ergibt sich schließlich noch eine einfache Invariantenkennzeichnung von $S$.

## I. Nichtarchimedisch perfekt bewertete Linearformenmoduln über einem beliebigen Körper.

**1.** $u_1, u_2, \ldots$ sei eine abgezählte Menge von Unbestimmten, K ein beliebiger Körper, dessen Elemente durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet werden.

Wir betrachten die Menge $M$ aller formalen unendlichen Summen

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots = \sum \alpha_i u_i,$$

von denen zwei dann und nur dann gleich sein sollen, wenn die entsprechenden Koeffizienten gleich sind.

**Definition 1.** $M$ heiße ein *perfekter* K-Modul — in Zeichen: $M = (u_1, u_2, \ldots)$ —, wenn zwischen den Elementen von $M$ die folgenden Beziehungen bestehen:

(a) Eine Multiplikation von Elementen von $M$ mit Elementen aus K wird definiert durch:

$$\alpha \sum \alpha_i u_i = \sum \alpha \alpha_i u_i$$

(b) Je zwei Elementen $u = \sum \alpha_i u_i$ und $v = \sum \beta_i u_i$ wird die Summe

$$u + v = \sum (\alpha_i + \beta_i) u_i$$

zugeordnet.

(c) In $M$ wird eine Limesoperation eingeführt durch die Festsetzung:

Ist $v_j = \sum_i \alpha_{ji} u_i \, (j = 1, 2, \ldots)$, so sei $\lim v_j = \lim_j \sum_i \alpha_{ji} u_i = \sum_i (\lim_j \alpha_{ji}) u_i$, wenn jede Folge $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots$ von einer gewissen Stelle ab konstant, etwa gleich $\alpha_i$ ist und entsprechend $\lim_j \alpha_{ji} = \alpha_i$ gesetzt wird [3]).

Sind in $u = \sum \alpha_i u_i$ alle $\alpha_i = 0$, so soll $u$ ebenfalls durch das Symbol 0 bezeichnet werden. Ferner setzen wir $\sum (-\alpha_i) u_i = -(\sum \alpha_i u_i)$. Dann ist $M$ offenbar ein Linearformenmodul über K.

**2.** Sind $v_j$ und $w_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ beliebige Elemente von $M$, so beweist man leicht:

$$\alpha \lim v_j = \lim (\alpha v_j), \tag{1}$$

wenn eine der beiden Seiten einen Sinn hat.

$$\lim v_j + \lim w_j = \lim (v_j + w_j), \tag{2}$$

wenn die linke Seite einen Sinn hat.

**Definition 2.** $e$ sei eine beliebige reelle Zahl $> 1$ und $u = \sum \alpha_i u_i \in M$. Dann sei

$$|u| = e^{-r} \, (r \geq 1), \text{ wenn } \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0, \ \alpha_{r+1} \neq 0;$$
$$|u| = 1 \text{ für } \alpha_1 \neq 0;$$
$$|u| = 0 \text{ für } u = 0.$$

[3]) K wird also auf triviale Weise topologisiert: Einer Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aus K wird der Grenzwert $\alpha$ zugeordnet, wenn fast alle $\alpha_i$ gleich $\alpha$ sind.

Hierfür gilt offenbar

$$|\alpha u| \leq |u| \tag{3}$$

$$|u+v| \leq \operatorname{Max}(|u|, |v|). \tag{4}$$

Unsere Bewertung ist also nichtarchimedisch.

*Eine Folge $v_1, v_2, \ldots$ aus $M$ ist dann und nur dann konvergent, wenn $\lim |v_{j+1} - v_j| = 0$ gilt.*

In der Tat: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt sofort aus Definition 1, (c) und Definition 2. Umgekehrt, ist sie erfüllt, und ist $v_j = \sum_i \alpha_{ji} u_i$, so bedeutet dies: In

$$v_{j+1} - v_j = \sum_i (\alpha_{j+1,i} - \alpha_{ji}) u_i$$

läßt sich für jedes $i$ ein Index $j_0(i)$ so bestimmen, daß

$$\alpha_{j+1,i} - \alpha_{ji} = 0 \quad \text{für} \quad j \geq j_0,$$

d. h. die $\alpha_{ji}$ sind für festes $i$ und hinreichend großes $j$ alle gleich. Hieraus folgt die Existenz von $\lim v_j$. $M$ ist also perfekt. Es folgt noch:

$\sum \alpha_j v_j = \lim_k \sum_1^k \alpha_j v_j$ existiert genau dann, wenn $\lim |\alpha_j v_j| = 0$ und wegen (3) also $\lim |v_j| = 0$ ist. Gleichbedeutend mit $\lim |v_j| = 0$ ist natürlich $\lim v_j = 0$.

Aus Definition 1, (c) und Definition 2 entnimmt man noch

$$|\lim v_j| \geq \operatorname{Max} |v_j|. \tag{5}$$

Sei schließlich $v_j = \sum_i \alpha_{ji} u_i$ und $\lim v_j = 0$. Dann sind die $\alpha_{ji}$ für festes $i$ und hinreichend großes $j$ Null und ferner existiert $\sum v_j = \sum_j \sum_i \alpha_{ji} u_i$. Man hat

$$\sum_j \sum_i \alpha_{ji} u_i = \lim_k \sum_{j=1}^k \sum_i \alpha_{ji} u_i = \lim_k \sum_i \left( \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} \right) u_i = \sum_i \lim_k \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} u_i = \sum_i \sum_j \alpha_{ji} u_i.$$

Also

$$\sum_j \sum_i \alpha_{ji} u_i = \sum_i \sum_j \alpha_{ji} u_i \text{ [4]}. \tag{6}$$

**3.** Für die Untermoduln von $M$ ist natürlich Abgeschlossenheit gegenüber der Limesbildung zu fordern:

**Definition 3.** Eine Untermenge $N$ von $M$ heißt *Untermodul* von $M$, wenn $N$ mit $v$ auch $\alpha v$ für jedes $\alpha \in K$ und mit $v$ und $w$ auch $v + w$ enthält und wenn aus $v = \lim v_j$, $v_j \in N$ stets $v \in N$ folgt.

Der Durchschnitt beliebig vieler Untermoduln ist offenbar wieder ein solcher. Ist $X$ ein Elementkomplex aus $N$, so wird der Durchschnitt $N$ aller $X$ enthaltenden Untermoduln als der von $X$ erzeugte Untermodul bezeichnet: $N = (X)$. Insbesondere besteht der von einem Element $v$ erzeugte Untermodul offenbar aus allen Vielfachen $\alpha v$.

Sind *$N_1$ und $N_2$ Untermoduln, so besteht $(N_1, N_2)$ aus allen Summen*

$$v_1 + v_2 \; (v_1 \in N_1, v_2 \in N_2).$$

In der Tat: $N$ sei die Menge aller Summen $v_1 + v_2$ $(v_1 \in N_1, v_2 \in N_2)$. Es genügt zu zeigen: Aus $v = \lim (v_{j1} + v_{j2})$ $(v_{jk} \in N_k)$ folgt $v \in N$. Zum Beweise gehen wir von $M$ zum Rest-

[4]) Dabei ist vorerst die spezielle *Basis* $u_1, u_2, \ldots$ zugrunde gelegt. Aus Satz 3 folgt aber, daß (6) auf jedes linear unabhängige Elementsystem zutrifft.

klassenmodul $M/N_2 = M'$ über und übertragen die Limesrelationen von $M$ auf $M'$ durch die Festsetzung $\lim f(v_j) = f(\lim v_j)$ [5]), wo $f$ die übliche homomorphe Abbildung von $M$ auf $M'$ bedeutet. Ferner können wir (indem wir von vornherein Restklassenbildung nach $N_1 \cap N_2$ vorgenommen denken) $N_1 \cap N_2 = 0$ voraussetzen. Dann ist $N' = N/N_2 = N_1$ hinsichtlich der Limesbildung abgeschlossen und aus $v = \lim (v_{j1} + v_{j2})$ folgt $v' = \lim v'_{j1} \in N'$, $v \in N$, w. z. z. w.

Ist ferner $v_1, v_2, \ldots$ eine Folge mit $\lim v_j = 0$, so besteht der davon erzeugte Modul $(v_1, v_2, \ldots)$ aus allen Summen $\sum_j \beta_{kj} v_j$. Setzt man nämlich $N_j = (v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots)$, so ist nach dem Vorangegangenen

$$N_j = (v_{j+1}) \dotplus N_{j+1}$$

(wo $\dotplus$ das Zeichen für die — nicht notwendig direkte — Gruppensumme ist). Ist dann $v$ beliebig aus $N_0 = N = (v_1, v_2, \ldots)$, so folgt für jedes $j = 1, 2, \ldots$:

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_j v_j + w_j \text{ mit } w_j \in N_j.$$

Nun besteht $N_j$ offenbar aus allen Summen $\sum_{k>j} \gamma_k v_k$ und den Grenzwerten der aus diesen Summen bestehenden Folgen. Hieraus ergibt sich wegen $\lim v_j = 0$ nach (3) und (5) leicht $\lim w_j = 0$, $v = \sum \beta_j v_j$. Zusammenfassend haben wir

**Satz 1.** *Ist $v_1, v_2, \ldots$ eine endliche Folge oder eine unendliche Folge mit $\lim v_j = 0$, so besteht der Untermodul $(v_1, v_2, \ldots)$ aus allen Summen $\sum \beta_j u_j$.*

**4.** Wir übertragen einige von den endlichen Moduln her bekannte Sätze und Begriffe auf $M$:

**Definition 4.** Eine Elementfolge $v_1, v_2, \ldots$ des K-Moduls $M$ mit $\lim v_j = 0$ ist ein *Erzeugendensystem* des Untermoduls $N$, wenn $N = (v_1, v_2, \ldots)$.

Die $v_j$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus $\sum \beta_j v_j = 0$ stets $\beta_j = 0$ folgt für alle $j = 1, 2, \ldots$. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des Untermoduls $N$ wird als *Basis* von $N$ bezeichnet.

**Satz 2 (Austauschsatz).** *Ist $v_1, v_2, \ldots$ eine Elementfolge mit $\lim v_j = 0$ und sind $w_1, w_2, \ldots$ linear unabhängige Elemente aus $(v_1, v_2, \ldots)$ mit $\lim w_k = 0$, so gibt es Elemente $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots$ unter den $v_j$ derart, daß für das aus $v_1, v_2, \ldots$ durch Austausch der $v_{j_k}$ gegen die $w_k$ entstehende Elementsystem $\ldots v_j \ldots w_k$ gilt:*

$$(\ldots v_j \ldots w_k \ldots) = (v_1, v_2, \ldots).$$

*Ist das System der $v_j$ insonderheit linear unabhängig, so auch das System $\ldots v_j \ldots w_k \ldots$.*

**Beweis.** Sei $w_1 = \sum \beta_j v_j$ und etwa $\beta_{j_1} \neq 0$. Dann ersetzen wir $v_{j1} = \beta_{j_1}^{-1} \left(w_1 - \sum_{j \neq j_1} \beta_j v_j\right)$ in dem System $v_1, v_2, \ldots$ durch $w_1$ und tauschen in dieser — auch bei endlichen Linearformenmoduln üblichen — Weise fortfahrend, die $w_k$ sukzessive in das System $v_1, v_2, \ldots$ hinein. Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß für die ausgetauschten Elemente $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots$

$$j_1 < j_2 < \cdots$$

gilt. Das durch den Austausch entstehende System sei $z_1, z_2, \ldots$. Dann gilt stets

$$(v_1, v_2, \ldots) = (z_1, \ldots z_n) \dotplus (v_{1+1}, v_{n+2}, \ldots),$$

[5]) Diese Festsetzung ist gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Abbildung $f$.

und für jedes $v \in (v_1, v_2, \ldots)$ gilt ein Gleichungssystem

$$v = z^n + v^n \left(n = 1, 2, \ldots;\ z^n \in (z_1, \ldots, z_n);\ v^n \in (v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots)\right).$$

Wegen $\lim v^n = 0$ folgt hieraus

$$v = \lim z^n \in (z_1, z_2, \ldots),$$

d. h. es ist $(z_1, z_2, \ldots) = (v_1, v_2, \ldots)$.

Nun seien die $v_j$ linear unabhängig. Dann ist für jedes $n$ auch das System $z_1, \ldots z_n$, $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots$ linear unabhängig. Ferner gilt

$$\sum_{k \neq i} (z_k) \subset (z_1) + \cdots + (z_{i-1}) + (z_{i+1}) + \cdots + (z_n) + (v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots),$$

und es folgt

$$\left(\sum_{k \neq 1} (z_k)\right) \cap \left(\sum_{k \neq 2} (z_k)\right) \cap \cdots \cap \left(\sum_{k \neq n} (z_k)\right) \subset (v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots),$$

also $\underset{i}{\triangle} \sum_{k \neq i} (z_k) = 0$. Daraus folgt nach bekannten Sätzen[6]) die Direktheit der Summe $\sum (z_k)$ und damit die lineare Unabhängigkeit der $z_k$.

**5.** Ist $v \neq 0$, so existiert $\lim (\alpha_j v)$ genau dann, wenn die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von einer gewissen Stelle ab konstant, etwa $= \alpha$ ist, und es gilt $\lim (\alpha_j v) = \alpha v$. Sei ferner $v_1, v_2, \ldots$ eine Folge mit $\lim v_j = 0$ und für jedes $j = 1, 2, \ldots$ existiere $\lim\limits_k \alpha_{kj} v_j = \alpha_j v$. Dann folgt aus $\lim v_j = 0$ nach (3) auch $\lim \alpha_{kj} v_j = 0$ und $\lim\limits_j \left(\lim\limits_k \alpha_{kj} v_j\right) = \lim\limits_j \alpha_j v_j = 0$ und damit die Existenz von $\sum\limits_j \alpha_{kj} v_j$ und von $\sum\limits_j \lim\limits_k \alpha_{kj} v_j$.

**Satz 3.** *Sei $v_1, v_2, \ldots$ eine Folge aus $M$ mit $\lim v_j = 0$. Dann ist*

$$\lim_k \sum_j \alpha_{kj} v_j = \sum_j \lim_k \alpha_{kj} v_j, \tag{7}$$

*sofern die rechte Seite einen Sinn hat, d. h. sofern $\lim \alpha_{kj}$ für jedes $j = 1, 2, \ldots$ existiert.*

*Sind darüberhinaus die $v_j$ linear unabhängig, so folgt auch umgekehrt aus der Existenz der linken Seite von (7) die der rechten und (7) gilt in beiden Richtungen.*

**Beweis.** Erstens: Es existiere $\lim \alpha_{kj}$ für jedes $j$ und es sei $v_j = \sum\limits_i \gamma_{ji} u_i$, wo $u_1, u_2, \ldots$ die in Nr. 1 zugrunde gelegte Basis ist. Dann ist nach Definition 1,(c) und (6):

$$(*) \qquad \sum_j \lim_k \alpha_{kj} v_j = \sum_j \lim_k \sum_i \alpha_{kj} \gamma_{ji} u_i = \sum_j \sum_i \lim \alpha_{kj} \gamma_{ji} u_i = \sum_i \left(\sum_j \lim \alpha_{kj} \gamma_{ji}\right) u_i.$$

Da wegen $\lim v_j = 0$ die $\gamma_{ji}$ für festes $i$ und hinreichend großes $j$ nach Definition 1, (c) Null sind, bestehen die Summen $\sum\limits_j \left(\lim\limits_k \alpha_{kj}\right) \gamma_{ji}$ aus endlich vielen Summanden. Daher und wegen (2) können in dem letzten Ausdruck von (*) $\sum\limits_j$ und $\lim\limits_k$ vertauscht werden und es ergibt sich (wieder nach Definition 1, (c) und (6)):

$$\sum_i \sum_j \lim_k \alpha_{kj} \gamma_{ji} u_i = \sum_i \lim_k \left(\sum_j \alpha_{kj} \gamma_{ji}\right) u_i = \lim_k \sum_i \sum_j \alpha_{kj} \gamma_{ji} u_i$$

$$= \lim_k \sum_j \sum_i \alpha_{kj} \gamma_{ji} u_i = \lim_k \sum_j \alpha_{kj} \sum_i \gamma_{ji} u_i = \lim_k \sum_j \alpha_{kj} v_j$$

und daraus nach (*) der erste Teil der Behauptung.

Zweitens: Die $v_j$ seien linear unabhängig. Da sich nach Satz 2 das System der $v_j$ dann zu einer Basis von $M$ ergänzen läßt, können wir $v_1, v_2, \ldots$ gleich als Basis von $M$

[6]) Vgl. *Krull*[1]), Satz 8.

voraussetzen. Dann lassen sich die $v_j$ durch einen (umkehrbar stetigen!)[7]) Automorphismus von $M$ in die Basis $u_1, u_2, \ldots$ überführen und die Behauptung folgt aus Definition 1, (c).

**6.** Wir zeigen noch, daß jeder Untermodul $N$ von $M$ eine linear unabhängige Basis besitzt und somit den gleichen Postulaten genügt, wie $M$ selber (Definition 1). In der Tat: Legen wir $u_1, u_2, \ldots$ als Basis von $M$ zugrunde, und ist $u_k$ das niedrigste in den $u_i$-Summen aus $N$ wirklich auftretende $u_i$, etwa

$$v_1 = \sum \alpha_i u_i \in N \; (\alpha_k \neq 0, \; \alpha_i = 0 \text{ für } i < k),$$

so können wir $(v_1)$ als direkten Summanden von $N$ abspalten: $N = (v_1) + N_1$, und in den Summen $\sum \alpha_i u_i$ aus $N_1$ ist offenbar stets $\alpha_i = 0$ für $i \leq k$. Die Fortsetzung des Verfahrens führt offenbar zu einer Basis $v_1, v_2, \ldots$ von $N$.

**Satz 4.** *Jede Folge $v_1, v_2, \ldots$ aus $M$ mit $\lim v_j = 0$ besitzt eine maximale linear unabhängige Teilfolge $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots$.*

**Beweis.** Aus der Menge aller linearen Relationen $\sum \alpha_j v_j = 0$, wo nicht alle $\alpha_j$ Null sind, bestimmen wir den kleinsten Index $k$ derart, daß stets $\alpha_j = 0$ für $j < k$, während mindestens ein $\alpha_k \neq 0$ ist. Aus dem System $v_1, v_2, \ldots$ lassen wir nun $v_k$ fort und wenden auf das restliche System das gleiche Verfahren an u. s. f. Das schließlich übrigbleibende System $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots$ ist dann offenbar linear unabhängig und man zeigt weiter leicht, daß sich jedes $v_j$ aus diesem System linear komponieren läßt. Daraus folgt die Behauptung.

## II. Reduktion des Multiplikatorenbereiches.

**7.** Hinfort sei $\mathsf{K}$ der Körper der $\pi$-adischen Zahlen, wo $\pi$ eine ganzrationale Primzahl ist. $\mathsf{P}$ sei der Ring der ganzen $\pi$-adischen Zahlen. Wir gehen von dem im vorigen Abschnitt betrachteten Modul $M$ zu einem Modul $R$ über, indem wir den Multiplikatorenbereich $\mathsf{K}$ von $M$ auf den Ring $\mathsf{P}$ einschränken und gleichzeitig die in $M$ eingeführte Topologie verschärfen:

**Definition 5.** $R$ sei die Menge aller unendlichen Summen $\sum \alpha_i u_i$ in den abzählbar vielen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ mit Koeffizienten $\alpha_i$ aus $\mathsf{K}$. Ferner sei $\sum \alpha_i u_i = \sum \beta_i u_i$ genau dann, wenn $\alpha_i = \beta_i$ ist für alle $i$, und es sei

$$\text{(a)} \qquad \varrho \sum \alpha_i u_i = \sum (\varrho \alpha_i) u_i \quad \underline{(\varrho \in \mathsf{P})},$$

$$\text{(b)} \qquad \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_i u_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) u_i,$$

$$\text{(c)} \qquad \lim_j \sum_i \alpha_{ji} u_i = \sum_i (\lim_j \alpha_{ji}) u_i,$$

wenn $\lim \alpha_{ji}$ in $\mathsf{K}$ (im üblichen Sinne) für jedes $i$ existiert.

Dann heißt $R$ ein *primärer (zur Primzahl $\pi$ gehöriger) perfekter* $(\mathsf{P}, \mathsf{K})$-*Modul.*

$R$ besteht offenbar aus den gleichen Elementen, wie der im vorangegangenen Abschnitt untersuchte Modul $M$. Ferner sind $R$ und $M$ hinsichtlich der Bildung endlicher

---

[7]) Der erste Teil von Satz 3 ist gleichbedeutend damit, daß die Abbildung $f(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i f(u_i) = \sum \alpha_i v_i$, wo $u_1, u_2, \ldots$ die in Definition 1 zugrunde gelegte Basis und $\lim v_i = \lim f(u_i) = 0$ ist, einen *stetigen* Endomorphismus von $M$ liefert. In der Tat: Existiere $\lim_j \sum_i \alpha_{ji} u_i = \sum_i \lim_j \alpha_{ji} u_i$. Dann ist nach (7)

$$f\Big(\lim_j \sum_i \alpha_{ji} u_i\Big) = \sum_i \Big(\lim_j \alpha_{ji}\Big) f(u_i) = \lim_j \sum_i \alpha_{ji} f(u_i),$$

d. h. unter Voraussetzung des ersten Teiles von Satz 3 gehen bei $f$ Limites in Limites über und $f$ ist stetig. Bilden die $v_i = f(u_i)$ sogar eine Basis von $M$ und ist also $f$ eineindeutig, so führt $f$ offenbar Nullfolgen in Nullfolgen und Nichtnullfolgen in Nichtnullfolgen über. Daraus folgt, daß dann von selbst auch die reziproke Abbildung $f^{-1}$ stetig und $f$ also umkehrbar stetig ist. Hierauf beruht der Beweis des zweiten Teiles von Satz 3.

Summen und hinsichtlich der Operatorenmultiplikation völlig identisch — letzteres mit der Einschränkung, daß in $R$ zunächst eben nur mit *ganzen* $\pi$-adischen Zahlen multipliziert werden darf. Die Einschränkung des Multiplikatorenbereiches von $\mathsf{K}$ auf $\mathsf{P}$ hat natürlich nur den Zweck, den Bereich der „zulässigen" Untermoduln zu erweitern. Nachdem dies festgesetzt ist, können und sollen auch gebrochene $\pi$-adische Zahlen weiterhin als „uneigentliche" Operatoren zugelassen werden: Z. B. wird unter $\frac{1}{\pi}v$ die (in $R$ sicher eindeutig vorhandene) Lösung der Gleichung $\pi x = v$ verstanden.

Schließlich sieht man noch: Jede in $M$ konvergente Folge ist auch in $R$ konvergent und zwar gegen den gleichen Grenzwert, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht. Ist $v_1, v_2, \ldots$ eine konvergente Folge aus $R$, die auch in $M$ konvergiert, so schreiben wir für $\lim v_j$ gelegentlich auch $\operatorname{Lim} v_j$, um darauf hinzuweisen, daß die Konvergenz sogar in $M$ stattfindet. Entsprechend bezeichnen wir eine sogar in $M$ existierende Summe $\sum v_j$ auch durch $\tilde{\sum} v_j$.

**8.** Wie leicht zu sehen, gelten die Rechenregeln (1) und (2) von Nr. 2 in $R$ ebenso wie in $M$. Wir erklären eine Bewertung von $R$:

**Definition 6.** $e$ sei die in Definition 2 benutzte reelle Zahl $>1$ und $u = \sum \alpha_i u_i \in R$. Dann sei

$|u| = e^{-r}$, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathsf{P}$ mit $\alpha_k \equiv 0 \pmod{\pi^{r-k}}$ $(k = 1, \ldots, r-1)$ und wenn nicht das gleiche auch für $r+1$ gilt.

$|u| = 1$, wenn $\alpha_1 \notin \mathsf{P}$.

$|0| = 0$.

Dann bleiben (3), (4), (5), (6) auch für $R$ gültig[8]), und ebenso erkennt man leicht die Richtigkeit des Cauchyschen Konvergenzkriteriums. Ist $\lim v_j = 0$ und sind $\alpha_j \in \mathsf{K}$ absolut beschränkt, so existiert stets $\sum \alpha_j v_j$. Sind aber die $\alpha_j$ beliebig aus $\mathsf{K}$, so läßt sich dies nur behaupten, wenn $\lim v_j = \operatorname{Lim} v_j = 0$ ist.

**Definition 7.** Sei $v_1, v_2, \ldots$ eine Elementfolge aus $R$. Die $v_j$ heißen *linear unabhängig über* $\mathsf{P}$ (*über* $\mathsf{K}$), wenn $\lim v_j = 0$ $(\operatorname{Lim} v_j = 0)$ gilt und wenn aus $\sum \alpha_i v_i = 0$ $(\alpha_i \in \mathsf{P}$ bzw. $\mathsf{K})$ stets $\alpha_i = 0$ folgt.

Die lineare Unabhängigkeit über $\mathsf{K}$ zieht offenbar stets die lineare Unabhängigkeit über $\mathsf{P}$ nach sich. Daß das Umgekehrte hier — im Gegensatz zum endlichen Falle — nicht zu gelten braucht, zeigt das folgende

*Beispiel.* Sei $v_0 = \sum u_i$, $v_1 = u_1$, $v_2 = \pi u_2$, $v_3 = \pi^2 u_3, \ldots$. Ist nun $\varrho_0 v_0 + \sum_{i>0} \varrho_i v_i = 0$ $(\varrho_i \in \mathsf{P})$, also $\sum_{i>0} (\varrho_0 + \pi^{i-1}\varrho_i) u_i = 0$, so folgt $\varrho_0 + \pi^{i-1}\varrho_i = 0$ für jedes $i$ und daraus sofort $\varrho_0 = \varrho_1 = \cdots = 0$. Das System $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ist also linear unabhängig über $\mathsf{P}$, nicht aber über dem Körper $\mathsf{K}$, wie die Relation $v_0 = v_1 + \frac{1}{\pi} v_2 + \frac{1}{\pi^2} v_3 + \cdots$ zeigt.

**9.** Einen Untermodul von $R$ erklären wir ebenso wie in Definition 3.

**Definition 8.** Ist $v_1, v_2, \ldots$ ein über $\mathsf{P}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem des Untermoduls $S$ von $R$, so bilden die $v_j$ eine $\mathsf{P}$-*Basis* von $S$. Sind die $v_j$ sogar über $\mathsf{K}$ linear unabhängig, so bilden sie eine $\mathsf{K}$-*Basis* von $S$ [9]).

---

[8]) Der in (3) mit $\alpha$ bezeichnete Multiplikator muß jetzt eine *ganze* $\pi$-adische Zahl sein!

[9]) $v_1, v_2, \ldots$ bildet eine Basis von $S$, bedeutet also: (a) $\lim v_j = 0$, (b) die $v_j$ sind linear unabhängig (über $\mathsf{P}$ bzw. $\mathsf{K}$), (c) $S$ ist der kleinste, alle Summen $\sum \varrho_j v_j$ $(\varrho_j \in \mathsf{P})$ enthaltende Untermodul von $R$. — Zu (c) wird gezeigt werden, daß die Menge aller Summen $\sum \varrho_j v_j$ $(\varrho_j \in \mathsf{P})$ bereits einen Untermodul bildet, der also mit $S$ identisch ist.

$R$ selbst besitzt offenbar keine Basis. Sind $u_1, u_2, \ldots$ die in Definition 1 und 5 zugrunde gelegten Elemente, so bilden offenbar die Summen $\sum \varrho_i u_i (\varrho_i \in \mathsf{P})$ einen Untermodul $G$ von $R$ mit der Basis $u_1, u_2, \ldots$. Alle Elemente $v \in G$ sind von endlicher Höhe in $G$, d. h. die Gleichung $\pi^r x = v$ besitzt nicht für beliebig großes $r$ Lösungen in $G$. In topologischer Hinsicht ist $G$ kompakt[10]), d. h. jede Elementfolge aus $G$ besitzt konvergente Teilfolgen. Die Struktur derartiger Moduln ist bekannt[2]) und wir können auf die vorhandenen Ergebnisse zurückgreifen.

**Definition 9.** Ein Untermodul $N$ von $R$, dessen Elemente einen Untermodul von $M$ (Kap. I) bilden, heißt *Grundmodul* in $R$. Eine Elementfolge $v_1, v_2, \ldots$, die *in* $M$ eine Basis von $N$ bildet, heißt *Grundbasis* von $N$.

Besitzt ein Untermodul $L$ von $R$ eine ($\mathsf{P}$ oder $\mathsf{K}$)-Basis, so heißt $L$ *Basismodul* in $R$.

$v_1, v_2, \ldots$ ist Grundbasis von $N$, bedeutet also: Es ist $\operatorname{Lim} v_j = 0$, die $v_j$ sind linear unabhängig über $\mathsf{K}$ und $N$ besteht aus allen Summen $\sum \alpha_i v_i (\alpha_i \in \mathsf{K})$. Trivialerweise ist $R$ selber Grundmodul und das in Definition 5 verwendete System $u_1, u_2, \ldots$ ist eine Grundbasis von $R$. Wegen Satz 2 läßt sich jedes über $\mathsf{K}$ linear unabhängiges Elementsystem zu einer Grundbasis von $R$ erweitern. — Wie leicht zu sehen, ist ein Grundmodul niemals Basismodul.

**10.** Die Konvergenz in $R$ wird auf die Limesbildung in dem in Nr. 9 erwähnten kompakten Modul $G$ und auf die Limesbildung des in Kap. I behandelten Moduls $M$ zurückgeführt durch

**Satz 5.** *Sind $w_1, w_2, \ldots$ Elemente aus $R$ und existiert $\sum w_k$, so gibt es Elemente $x_k \in G$ mit $\lim x_k = 0$ und Elemente $y_k$ mit $\operatorname{Lim} y_k = 0$ derart, daß*

$$w_k = x_k + y_k,$$
$$\sum w_k = \sum x_k + \tilde{\sum} y_k$$

*ist. Entsprechend gilt für konvergente Folgen $v_1, v_2, \ldots$ aus $R$*

$$\lim v_j = \lim z_j + \operatorname{Lim} t_j,$$

*wo $z_j \in G$ und $v_j = z_j + t_j$ ist.*

**Beweis.** $\sum w_k$ möge existieren, d. h. es sei $\lim w_k = 0$. Ist $w_k = \sum \alpha_{ki} u_i$, so heißt dies nach Definition 6 von $|w_k| = e^{-r_k}$: In $\alpha_{ki} \equiv 0 \, (\pi^{r_k - i})$ $(i = 1, \ldots, r_k - 1)$ geht $r_k$ mit $k$ gegen $\infty$. Setzen wir also $x_k = \sum_{i=1}^{r_k} \alpha_{ki} u_i$, $y_k = \sum_{i > r_k} \alpha_{ki} u_i$, so ist $w_k = x_k + y_k$, $x_k \in G$, $\lim x_k = 0$, $\operatorname{Lim} y_k = 0$. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung. — Sei ferner die Folge $v_1, v_2, \ldots$ in $R$ konvergent. Wir setzen $v_k - v_{k-1} = w_k (k = 2, 3, \ldots)$, $v_1 = w_1$. Dann ist $\lim w_k = 0$ und $\lim v_j = \sum w_k$. Wie soeben gezeigt, gibt es dann eine Darstellung $\sum w_k = \sum x_k + \tilde{\sum} y_k (x_k \in G)$ und es folgt

$$\lim v_j = \sum w_k = \sum x_k + \tilde{\sum} y_k = \lim z_j + \operatorname{Lim} t_j$$

mit $z_j = \sum_1^j x_k \in G$, $t_j = \sum_1^j y_k$ und $z_j + t_j = \sum_1^j (x_k + y_k) = \sum_1^j w_k = v_j$. Damit ist alles bewiesen.

Aus Definition 5, (c) folgt sofort $\lim (\alpha_k v) = (\lim \alpha_k) v$.

Wir beweisen nun den für das Rechnen in $R$ grundlegenden

**Satz 6.** *Ist $v_1, v_2, \ldots$ eine Elementfolge mit $\operatorname{Lim} v_j = 0$, so gilt*

$$\lim_j \sum_k \gamma_{kj} v_j = \sum_j \lim_k \gamma_{kj} v_j \tag{8}$$

*wenn die rechte Seite einen Sinn hat.*

[10]) Vgl. *Krull* [1]), Zusatz zu Satz 11.

*Sind die $v_j$ darüber hinaus linear unabhängig über* K, *so folgt auch umgekehrt aus der Existenz der linken Seite von* (8) *die der rechten und* (8) *gilt in beiden Richtungen.*

**Beweis.** Erstens: Existiere $\sum_j \lim_k \gamma_{kj} v_j$. Wir setzen im Sinne des Beweises von Satz 5

(a) $$(\gamma_{kj} - \gamma_{k-1,j}) v_j = w_j^k \quad (k = 2, 3, \ldots), \quad \gamma_{1j} v_j = w_j^1.$$

Dann ist

(b) $$\sum_k w_j^k = \lim_k \gamma_{kj} v_j.$$

Wegen $\operatorname{Lim}_j v_j = 0$ gilt dann $\operatorname{Lim}_j w_j^k = 0$. Nach Satz 5 zerlegen wir

(c) $$w_j^k = x_j^k + y_j^k \quad (x_j^k \in G).$$

Dann gilt, wie aus dem Beweis von Satz 5 zu entnehmen und wegen $\operatorname{Lim}_j v_j = 0$:

(d) $$\lim_k x_j^k = 0,$$

(d′) $$\operatorname{Lim}_k y_j^k = 0,$$

(e) $$\operatorname{Lim}_j x_j^k = 0 \quad \text{gleichmäßig in } k,$$

(e′) $$\operatorname{Lim}_j y_j^k = 0 \quad \text{gleichmäßig in } k.$$

Die $j$-Konvergenz von $x_j^k$ und $y_j^k$ in (e) und (e′) ist wegen (a) und $\operatorname{Lim} v_j = 0$ gleichmäßig in $k$. Wir setzen

(f) $$z_j^k = \sum_{r=1}^{k} x_j^r,$$

(f′) $$t_j^k = \sum_{r=1}^{k} y_j^r.$$

Dann ist

(g) $$z_j^k + t_j^k = \gamma_{kj} v_j.$$

Wegen (d), (d′) existiert $\lim_k z_j^k$ und $\operatorname{Lim}_k t_j^k$ und wegen (e), (e′) gilt

(h) $$\operatorname{Lim}_j \left(\lim_k z_j^k\right) = 0,$$

(h′) $$\operatorname{Lim}_j \left(\operatorname{Lim}_k t_j^k\right) = 0.$$

Also existiert $\sum_j \lim_k z_j^k$ und $\tilde{\sum}_j \operatorname{Lim}_k t_j^k$ und nach (g) ist

$$\sum_j \lim_k \gamma_{kj} v_j = \sum_j \lim_k (z_j^k + t_j^k) = \sum_j \lim_k z_j^k + \tilde{\sum}_j \operatorname{Lim}_k t_j^k.$$

In den beiden rechts stehenden Ausdrücken sind Summe und Limes aber nach den in $G$ und $M$ (Satz 3) geltenden Regeln vertauschbar, und wir haben wie behauptet

$$\sum_j \lim_k \gamma_{kj} v_j = \lim_k \sum_j z_j^k + \operatorname{Lim}_k \tilde{\sum}_j t_j^k = \lim_k \sum_j (z_j^k + t_j^k) = \lim_k \sum_j \gamma_{kj} v_j.$$

Zweitens: $\lim_k \sum_j \gamma_{kj} j_j$ existiere und die $v_j$ seien linear unabhängig über $K$. Dann läßt sich nach Satz 2 das System der $v_j$ zu einer Grundbasis von $R$ erweitern. Dann erfolgt der Übergang von der in Definition 5 zugrunde gelegten Grundbasis $u_1, u_2, \ldots$ zu dem System $v_1, v_2, \ldots$ durch einen [umkehrbar stetigen! vgl. [7])] Automorphismus von $R$ und hieraus folgt nach Definition 5, (c) bereits die Behauptung.

**11.** Wir untersuchen die Untermoduln von $R$. Zunächst sieht man:

(a) *Ist* $v_1, v_2, \ldots$ *eine Elementfolge aus* $R$ *mit* $\operatorname{Lim} v_j = 0$, *so bilden die Summen* $\sum \alpha_j v_j$ $(\alpha_j \in \mathsf{K})$ *einen Grundmodul* $N$ *in* $R$.

(b) *Ist* $v_1, v_2, \ldots$ *eine Elementfolge aus* $R$ *mit* $\lim v_j = 0$, *so bilden die Summen* $\sum \varrho_j v_j$ $(\varrho_j \in \mathsf{P})$ *einen kompakten Untermodul* $L$ *vom Typus* $G$ (s. Nr. 9) *in* $R$.

In der Tat: Daß $N$ und $L$ die Moduleigenschaft besitzen, ist klar. Die Abgeschlossenheit gegenüber der Limesbildung folgt für $N$ sofort aus Satz 6, die Grundmoduleigenschaft aus Satz 1.

Im Falle (b) ergibt sich die Abgeschlossenhait genau nach dem Muster des Beweises von Satz 1. Dann enthält $L$ offenbar nur Elemente von endlicher Höhe in $L$, wie sofort aus der Tatsache folgt, daß die Untermoduln $\pi^r \cdot L$ für hinreichend großes $r$ nur Elemente von beliebig kleinem Betrag enthalten. $L$ ist also kompakt[10]), d. h. vom Typus $G$.

Nach den für kompakte Moduln geltenden Regeln besitzt $L$ eine $\mathsf{P}$-Basis, ist also ein Basismodul (Definition 9).

Wir stellen zunächst einige für Grundmoduln geltende Regeln zusammen:

($a_1$) *Jeder Untermodul* $N$ *von* $M$ *ist auch (Grund-)Untermodul von* $R$.

Folgt aus (a), da $N$ aus allen Kombinationen $\sum \alpha_i v_i (\alpha_i \in \mathsf{K})$ einer Folge $v_1, v_2, \ldots$ mit $\operatorname{Lim} v_j = 0$ besteht (vgl. Nr. 6).

($a_2$) *Durchschnitt und Vereinigungsmoduln von Grundmoduln sind Grundmoduln.*

Denn Durchschnitt bzw. Vereinigung von Grundmoduln enthalten jedenfalls den *in* $M$ gebildeten Durchschnitt bzw. Vereinigungsmodul und sind also nach ($a_1$) mit diesem identisch.

($a_3$) *Jeder Grundmodul* $N$ *ist direkter Summand von* $R$.

Denn $N$ ist direkter Summand von $M$. Aber $R$ und $M$ bestehen aus den gleichen Elementen und sind hinsichtlich der endlichen Summenbildung identisch.

**12.** Wir betrachten nun beliebige Untermoduln $S$ von $R$. Wegen ($a_2$) enthält $S$ einen größten Grundmodul $N$ und wegen ($a_3$) ist dieser direkter Summand auch von $S$:

$$R = N + N',$$

$$S = N + L \quad (L = S \cap N').$$

$L$ enthält keinen Grundmodul und also auch kein Element von unendlicher Höhe, ist also ein kompakter Basismodul. Wir haben daher

**Satz 7.** *Jeder Untermodul* $S$ *von* $R$ *ist entweder Grundmodul oder Basismodul oder direkte Summe eines Grundmoduls und eines Basismoduls.*

Wir können uns also auf die Betrachtung von Basismoduln beschränken. Diese werden beherrscht durch

**Satz 8.** *Jeder Basismodul* $L$ *in* $R$ *besitzt sogar eine* $\mathsf{K}$-*Basis.*

**Beweis.** $v_1, v_2, \ldots$ sei eine $\mathsf{P}$-Basis von $L$ und $v_j = \sum \alpha_{ji} u_i$. Wegen

$$\lim v_j = \lim_j \sum_i \alpha_{ji} u_i = \sum_i \left(\lim_j \alpha_{ji}\right) u_i = 0$$

ist $\lim\limits_j \alpha_{ij} = 0$ für jedes $i$, und die $\alpha_{ji}$ sind für festes $i$ beschränkt. Sei nun (für $i = 1$) $\beta_1$ das absolut größte unter den $\alpha_{j1}$, und $\beta_1$ trete in $v_{j_1} = \beta_1 u_1 + \sum\limits_i \alpha_{j_1 i} u_i$ als Koeffizient auf.

Wir setzen $v_{j_1} = w_1$ und ersetzen die übrigen $v_k$ durch $w'_k = v_k - \varrho_k w_1$, worin $\varrho_k \in \mathsf{P}$ so gewählt ist, daß $u_1$ in $w'_k = \sum \gamma_{ki} u_i$ nicht mehr auftritt. Dann ist $w_1, w'_2, w'_3, \ldots$ eine Basis von $L$. Auf $w'_2, w'_3, \ldots$ wenden wir jetzt dieselbe Schlußweise in bezug auf $u_2$ an und erhalten eine Basis $w_1, w_2, w''_3, w''_4, \ldots$ von $L$, so daß $u_1$ und $u_2$ nicht in den $u$-Summendarstellungen von $w''_3, w''_4, \ldots$ vorkommen. Schließlich erhält man so offenbar eine $\mathsf{K}$-Basis $w_1, w_2, \ldots$ von $L$.

Die $\mathsf{K}$-Basis von $L$ ist die Grundbasis des kleinsten $L$ umfassenden Grundmoduls, und $L$ ist in diesen ebenso eingebettet wie (s. Nr. 3) $G$ in $R$[11]).

**13.** Unter der Dimension eines Grundmoduls $N$ verstehen wir die Anzahl der Elemente einer Grundbasis von $N$. Die Dimension ist also eine natürliche Zahl oder $\infty$. Der Restklassenmodul $R/N$ ist isomorph einem Grundmodul in $R$ (Satz 2) und dessen Dimension ist die *Codimension* von $N$. Dimension und Codimension bilden ein vollständiges Invariantensystem von $N$.

Aus der Bemerkung am Schluß der vorigen Nummer folgt sofort, das für einen Basismodul $L$ Dimension und Codimension des kleinsten $L$ umfassenden Grundmoduls ein Invariantensystem bilden. Ein Invariantensystem für einen beliebigen Untermodul kann nun nach Satz 7 sofort gebildet werden.

---

[11]) Jetzt ist leicht zu sehen, daß alle Restklassenmoduln von $R$, d. s. die separabeln Gruppen Krulls [1]), die nur Elemente von unendlicher Höhe enthalten, stets zyklisch direkt zerlegbar sind. Dies Resultat läßt sich auch aus den Krullschen Kriterien gewinnen.

---

Eingegangen 24. Juli 1950.

# Zur Lösbarkeit von gewissen elliptischen Differentialgleichungen.

Von *Hans Hornich* in Graz.

Führt man bei den Polarkoordianten $\varrho, \varphi$ der Ebene statt $\varrho$ eine Potenz $\varrho^a = r$ ein und setzt den transformierten Laplaceschen Ausdruck der unbekannten Funktion gleich einer gegebenen regulären Funktion, so wird hier die so entstandene Differentialgleichung auf die Regularität ihrer Lösungen für $r = 0$ untersucht; es zeigt sich, daß diese von $a$ abhängt, und zwar gibt es bei irrationalem $a$ unter Umständen keine reguläre Lösung, wenn $a$ einer Menge von speziellen Liouvilleschen (also transzendenten) Zahlen angehört[1]).

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$L(u) \equiv a^2\left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f,$$

($r, \varphi$ Polarkoordinaten, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geqq 0$), wo $0 < a < 1$ eine Konstante und

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{\substack{\nu = n, n-2, n-4, \ldots \\ \nu \geqq 0}} (\alpha_{\nu n} \cos\nu\varphi + \beta_{\nu n} \sin\nu\varphi)$$

mit $|\alpha_{\nu n}| < M$ und $|\beta_{\nu n}| < M$ für alle $\nu$, $n$ sei[2]) ($f$ ist dann für $r < 1$ nach homogenen Termen in $x, y$ entwickelbar).

Ist nun $u$ eine für $0 < r < \varepsilon \leqq 1$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die unsere Differentialgleichung befriedigt, so gilt die Darstellung

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_\nu(r) \cos\nu\varphi + B_\nu(r) \sin\nu\varphi]$$

und (etwa nur für $\nu > 0$ angeschrieben)

$$A_\nu(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos\nu\varphi \, d\varphi,$$

so daß die $A_\nu$ und $B_\nu$ zweimal stetig nach $r$ differenzierbar sind. Dann ist weiter mit

---

[1]) Vgl. *H. Hornich*, Monatsh. f. Math. **54** (1950), 183—187. Die Kenntnis dieser Arbeit wird hier nicht vorausgesetzt. — Über ähnliche Vorkommnisse bei hyperbolischen Differentialgleichungen vgl. *D. G. Bourgin — R. Duffin*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 851—858.

[2]) Diese Voraussetzung läßt sich weitgehend reduzieren, ohne den Beweis wesentlich zu ändern.

Hilfe von partieller Integration für $0<r<\varepsilon$

$$a^2\left(r^2\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial r^2}+r\frac{\partial A_\nu}{\partial r}\right)-\nu^2 A_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[a^2\left(r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\cos\nu\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\cos\nu\varphi\, d\varphi=\sum_{n=\nu,\nu+2,\ldots} r^n\alpha_{\nu n}.$$

Diese Differentialgleichung für $A_\nu$ hat bei irrationalem $a$ die Lösung

$$A_\nu(r)=\sum_{n=\nu,\nu+2,\ldots}\frac{\alpha_{\nu n}r^n}{a^2n^2-\nu^2}+C_\nu r^{\frac{\nu}{a}}+D_\nu r^{-\frac{\nu}{a}}\qquad(\nu>0)$$

mit willkürlichen $C_\nu$ und $D_\nu$. Die analoge Differentialgleichung für $A_0$ hat die Lösung

$$A_0(r)=\frac{\alpha_{00}}{2a^2}(\lg r)^2+\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{\alpha_{0n}r^n}{a^2n^2}+C_0+D_0\lg r,$$

während sich für die $B_\nu$ ergibt

$$B_\nu(r)=\sum_{n=\nu,\nu+2,\ldots}\frac{\beta_{\nu n}r^n}{a^2n^2-\nu^2}+C'_\nu r^{\frac{\nu}{a}}+D'_\nu r^{-\frac{\nu}{a}}\qquad(\nu>0)$$

mit willkürlichen $C'_\nu$ und $D'_\nu$. Die angeschriebenen Reihen konvergieren sämtlich für $r<1$.

Halten wir $\nu$ fest, so gibt es unter den Zahlen $n=\nu,\ \nu+2,\ \nu+4,\ldots$ genau ein $n$ mit $|an-\nu|<a$; dieses $n$ bezeichnen wir mit $n(\nu)$. Für $\nu_1<\nu_2$ ist auch $n(\nu_1)<n(\nu_2)$. Dann konvergieren die nach Weglassung der Indizespaare $\nu$, $n(\nu)$ verbleibenden Doppelreihen in der Darstellung von $u$, nämlich

$$\sum_\nu\sum_n\frac{\alpha_{\nu n}r^n\cos\nu\varphi}{a^2n^2-\nu^2}\quad\text{und}\quad\sum_\nu\sum_n\frac{\beta_{\nu n}r^n\sin\nu\varphi}{a^2n^2-\nu^2},$$

für $r<1$ absolut und gleichmäßig für alle $\varphi$; denn es ist für jede dieser Doppelreihen die Summe der absoluten Beträge

$$\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}(r^\nu+r^{\nu+2}+\cdots)\frac{M}{a^2}-\frac{M}{a^2}=\frac{M}{a^2(1-r)(1-r^2)}-\frac{M}{a^2}.$$

Wir haben dann noch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}r^{n(\nu)}}{a^2[n(\nu)]^2-\nu^2}+C_\nu r^{\frac{\nu}{a}}+D_\nu r^{-\frac{\nu}{a}}\right)\cos\nu\varphi+\left(\frac{\beta_{\nu n(\nu)}r^{n(\nu)}}{a^2[n(\nu)]^2-\nu^2}+C'_\nu r^{\frac{\nu}{a}}+D'_\nu r^{-\frac{\nu}{a}}\right)\sin\nu\varphi\right]$$

zu untersuchen. Setzt man etwa

$$C_\nu=-\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}}{a^2[n(\nu)]^2-\nu^2}\quad\text{und}\quad C'_\nu=-\frac{\beta_{\nu n(\nu)}}{a^2[n(\nu)]^2-\nu^2},$$

so ist

$$\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}}{a^2[n(\nu)]^2-\nu^2}\left(r^{n(\nu)}-r^{\frac{\nu}{a}}\right)=\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}}{a[an(\nu)+\nu]}\lg r\, r^{\frac{\nu}{a}+\vartheta_\nu}$$

mit geeigneten $|\vartheta_\nu|<1$, und die Summe über alle $\nu$ konvergiert absolut für alle $0<r<1$. Analog natürlich für die Glieder mit $C'_\nu$.

Unsere Differentialgleichung hat also stets für $0<r<1$ Lösungen, die dort auch regulär sind. Soll die Lösung für $r=0$ ebenfalls regulär sein, so muß $C_\nu=C'_\nu=D_\nu=D'_\nu=0$ für $\nu>0$ und $D_0=\alpha_{00}=0$ sein. Wir haben dann nur die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}\cos\nu\varphi+\beta_{\nu n(\nu)}\sin\nu\varphi}{a^2[n(\nu)]^2-\nu^2}\,r^{n(\nu)}$$

zu untersuchen. In dieser Reihe streben die Koeffizienten von $\cos \nu\varphi$ und $\sin \nu\varphi$ gegen Null für

$$\frac{1}{r} > \overline{\lim_{\nu}} \sqrt[n(\nu)]{\left|\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}}{a n(\nu)-\nu}\right|} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} > \overline{\lim_{\nu}} \sqrt[n(\nu)]{\left|\frac{\beta_{\nu n(\nu)}}{a n(\nu)-\nu}\right|}.$$

*Die Differentialgleichung $L(u) = f$ hat bei irrationalem $a$ stets (reguläre) Lösungen für $0 < r < 1$, eine auch für $r = 0$ reguläre Lösung aber nur für $\alpha_{00} = 0$ und*

$$\overline{\lim_{\nu}} \sqrt[n(\nu)]{\left|\frac{\alpha_{\nu n(\nu)}}{a n(\nu)-\nu}\right|} + \overline{\lim_{\nu}} \sqrt[n(\nu)]{\left|\frac{\beta_{\nu n(\nu)}}{a n(\nu)-\nu}\right|} < +\infty.$$

Diese innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt reguläre Lösung ist dann bis auf eine additive Konstante *eindeutig*.

*Eine notwendige Bedingung für die reguläre Unlösbarkeit der Differentialgleichung bei $r = 0$ besteht daher darin, daß die irrationale Zahl $a$ der Menge der — notwendig transzendenten — Zahlen angehört, für welche $\underline{\lim} \sqrt[n]{\left|a - \frac{\nu}{n}\right|} = 0$ ist für alle Paare natürlicher Zahlen $\nu$, $n$ mit gerader Differenz $n - \nu$.*

Für rationale $a$ haben wir entsprechend die Indizespaare mit $an = \nu$ herauszunehmen und mit diesen analog wie oben zu verfahren; wie nicht näher ausgeführt werden soll, treten hier logarithmische Glieder auf, die unter Umständen eine reguläre Unlösbarkeit für $r = 0$ bewirken.

---

Eingegangen 26. August 1950.

# Die allgemeinen äquidistanten Transformationen der von Bianchi entdeckten isometrischen Paare Tschebyschefscher Netze.

Von *Hans Jonas* in Berlin-Steglitz.

---

**1. Einleitung.** Die Betrachtung eines Systems von vier Integralen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\vartheta$ einer Moutardschen Differentialgleichung

$$\xi_{\alpha\beta} = \mathsf{M}\,\xi \tag{1}$$

führt auf die Theorie der *Paare isometrischer Flächen*, die auf die Doppelschar der Kurven $(\alpha, \beta)$ von *permanenter*, d. h. bei der Abwicklung der einen Fläche auf die andere sich nicht ändernder *Normalkrümmung* bezogen sind. Wird von der Bezeichnung

$$(u, v) = \int [(uv_\alpha - vu_\alpha)\,d\alpha - (uv_\beta - vu_\beta)\,d\beta] \tag{2}$$

Gebrauch gemacht, so stellt sich das isometrische Flächenpaar $(x)$, $(\bar{x})$ mittels der *verallgemeinerten Lelieuvreschen Formeln*

$$x = (\xi, \vartheta) + (\eta, \zeta), \qquad \bar{x} = (\xi, \vartheta) - (\eta, \zeta) \tag{3}$$

dar, in denen die *drei* Größen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ der zyklischen Vertauschung zu unterwerfen sind. Erstreckt sich die viergliedrige Summe $\mathbf{S}$ über $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\vartheta$, so sind die $(x)$ und $(\bar{x})$ gemeinsamen Koeffizienten des Linienelements:

$$E = \mathbf{S}\xi^2\mathbf{S}(\xi_\alpha)^2 - (\mathbf{S}\xi\xi_\alpha)^2, \quad F = -\mathbf{S}\xi^2\mathbf{S}\xi_\alpha\xi_\beta + \mathbf{S}\xi\xi_\alpha\mathbf{S}\xi\xi_\beta, \quad G = \mathbf{S}\xi^2\mathbf{S}(\xi_\beta)^2 - (\mathbf{S}\xi\xi_\beta)^2. \tag{4}$$

Die Richtungen der beiden Flächennormalen sind durch die Einheitsvektoren ($\xi$, $\eta$, $\zeta$ in zyklischer Vertauschung)

$$X = \frac{1}{\nu}[\xi\vartheta' - \xi'\vartheta + \eta\zeta' - \zeta\eta'], \quad \bar{X} = \frac{1}{\nu}[\xi\vartheta' - \xi'\vartheta - (\eta\zeta' - \zeta\eta')], \quad \nu = \sqrt{\mathbf{S}\xi^2\mathbf{S}\xi'^2} \tag{5}$$

gegeben, wobei die Verhältnisse von $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $\vartheta'$ durch die Gleichungen

$$\mathbf{S}\xi\xi' = 0, \quad \mathbf{S}\xi_\alpha\xi' = 0, \quad \mathbf{S}\xi_\beta\xi' = 0 \tag{6}$$

bestimmt sind. Im Anschluß an (3) und (5) stellt man fest, daß die zweiten Fundamentalformen von $(x)$ und $(\bar{x})$ sich nur durch das Vorzeichen des Mittelgliedes unterscheiden, daß also[1])

$$\bar{L} = L, \quad \bar{M} = -M, \quad \bar{N} = N \tag{7}$$

---

[1]) Es wird übrigens:

$$L = \frac{1}{\nu}\mathbf{S}\xi^2\mathbf{S}\xi_{\alpha\alpha}\xi', \quad N = -\frac{1}{\nu}\mathbf{S}\xi^2\mathbf{S}\xi_{\beta\beta}\xi', \quad M = -\frac{1}{\nu}\Delta,$$

wobei $\Delta = (\xi_\alpha, \xi_\beta, \xi, \xi')$ die vierreihige Determinante in den Buchstaben $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\vartheta$ bedeutet.

ist. Daraus folgt dann für entsprechende Punkte $x$ und $\bar{x}$ die Übereinstimmung in den Normalkrümmungen der Kurven $\alpha = \text{const.}$ bzw. $\beta = \text{const.}$ und in Anbetracht der Invarianz der geodätischen Krümmung die in der Flexion überhaupt. Beziehungen zur elliptischen Geometrie entspringen der Festsetzung $S\xi'^2 = 1$. Durch (5) sind dann die zugehörigen Cliffordschen Bildkugeln definiert.

Wird auf das System $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ eine durch ein weiteres Integral $R$ von (1) bewirkte Moutardsche Transformation ausgeübt, wobei sich $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \vartheta_1$ durch Quadraturen

$$\xi_1 = \frac{1}{R}(\xi, R) \text{ usw.} \tag{8}$$

ergeben, so gelangt man zu einem neuen isometrischen Flächenpaar $(x_1)$, $(\bar{x}_1)$:

$$x_1 = x + \xi\vartheta_1 - \xi_1\vartheta + \eta\zeta_1 - \zeta\eta_1, \quad \bar{x}_1 = \bar{x} + \xi\vartheta_1 - \xi_1\vartheta - (\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1) \tag{9}$$

mit der gleichen Eigenschaft der Kurven $(\alpha, \beta)$. Die auf die Asymptotenlinien $(\alpha, \beta)$ bezogene *Differenzfläche*

$$\tilde{x} = x - \bar{x} = 2(\eta, \zeta) \tag{10}$$

erfährt dabei, wie unmittelbar zu ersehen ist, eine *asymptotische Transformation*, d. h. $(\tilde{x})$ und $(\tilde{x}_1)$ sind Brennmäntel einer $W$-Kongruenz[2]).

Ein bemerkenswerter Sonderfall ist der einer Moutardschen Gleichung (1) mit einem System von vier durch die quadratische Relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2 = 1 \tag{11}$$

verbundenen Integralen. Aus (1) und (11) schließt man, daß man über die Variablen $\alpha$ und $\beta$ noch so verfügen kann, daß

$$S(\xi_\alpha)^2 = 1, \quad S(\xi_\beta)^2 = 1 \tag{12}$$

wird. Aus (4) folgt dann

$$\Sigma dx^2 = \Sigma d\bar{x}^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2, \tag{13}$$

wobei

$$F = \cos\omega = -S\xi_\alpha\xi_\beta = \mathsf{M} \tag{14}$$

ist. Die Kurven permanenter Normalkrümmung des isometrischen Flächenpaares $(x)$, $(\bar{x})$ bilden also *Tschebyschefsche Netze*. Von den beiden zueinander polarreziproken Flächen $(\xi, \eta, \zeta, \vartheta)$ und $(\xi', \eta', \zeta', \vartheta')$ ist die zweite eine Voßsche Fläche, ausgezeichnet durch das aus geodätischen Linien bestehende konjugierte Netz $(\alpha, \beta)$, während für die erste das Linienelement wieder die Tschebyschefsche Form annimmt:

$$S\,d\xi^2 = d\alpha^2 - 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2.$$

Bianchi hat die Transformationstheorie für den allgemeineren Fall einer Moutardschen Gleichung mit $n$ durch eine quadratische Relation verbundenen Integralen entwickelt. Für $n = 4$ treten dabei im Zusammenhang mit den Voßschen Flächen des elliptischen Raumes die isometrischen Paare Tschebyschefscher Netze auf, deren Darstellung auf die vorher schon von Fubini[3]) behandelte Cliffordsche Abbildung auf ein Kugel-

---

[2]) Unabhängig von dem hier wiedergegebenen Gedankengang habe ich die gedachte Transformation in einer früheren Arbeit, von dem isometrischen Flächenpaar ausgehend, entwickelt, nämlich auf Grund der Forderung, daß der die Transformation vermittelnde Vektor bei der Abwicklung von den Flächenelementen in starrer Koppelung mitgeführt wird. Siehe *H. Jonas*, Über ein die Verbiegung der Linienkongruenzen betreffendes Problem und über die Transformation der *Bonnet*schen Flächenpaare, Math. Ann. 86 (1922), 78.

[3]) *G. Fubini*, Il parallelismo di Clifford negli spazii ellittici, Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa 9 (1904).

paar des euklidischen Raumes gegründet wird[4]). Der Übergang zu den Koordinaten des transformierten isometrischen Flächenpaares erfolgt dabei noch nicht quadraturenfrei, wie er sich im Anschluß an die verallgemeinerten Lelieuvreschen Formeln (1) an Hand von (9) für die (natürlich entsprechend zu spezialisierende) Moutardsche Transformation ergibt. Infolgedessen fehlt bei Bianchi eine wesentliche Eigenschaft dieser Transformation der von ihm entdeckten isometrischen Tschebyschef-Netze, nämlich die Tatsache, daß sie *äquidistant* ist, d. h. daß die Abstände zwischen den Punkten der gegebenen und der transformierten Flächen konstant und, hier zunächst, für beide Flächen des Paares gleich sind. Auf dieses Ergebnis führte mich die Untersuchung der Frage, wieweit sich aus der Ribaucourschen Transformation der elliptischen Geometrie Transformationen für Flächenklassen im euklidischen Raume gewinnen lassen[5]). Ich habe damals, wenn auch ohne nähere Ausführungen, darauf hingewiesen, daß die betrachtete Transformation der isometrischen Paare Tschebyschefscher Netze trotz der erwähnten einfachen geometrischen Eigenschaft nicht als elementarer Prozeß anzusprechen ist, insofern als sie sich in zwei Teiloperationen auflösen läßt, die von je einer totalen Riccatischen Differentialgleichung abhängen; allerdings ist diese Zerlegung nicht reell[6]). Nun kann man aber die Zusammensetzung konjugiert-imaginärer Elementaroperationen noch in der Weise handhaben, daß eine neuartige reelle, *zwei* charakteristische Konstanten enthaltende Transformation daraus hervorgeht, die gleichfalls *äquidistant* ist, bei der aber die konstanten Abstände $k$, $\bar{k}$ für die beiden Flächen des Paares verschieden sind. Diese ist dann *nicht* mehr äquivalent mit einer asymptotischen Transformation der Differenzfläche.

Im folgenden wird nun zunächst, wobei aber die soeben angedeuteten Gesichtspunkte nicht als Grundlage dienen, die *allgemeine äquidistante Transformation* für Bianchis isometrische Paare Tschebyschefscher Netze aufgestellt. Als vorbereitend zu bewerten ist die in einer voraufgegangenen Arbeit entwickelte Theorie einer äquidistanten Kurventransformation[7]). Bei Anwendung auf das gegenwärtige Problem werden die beiden Scharen der Parameterkurven einzeln von dem kurventheoretischen Prozeß erfaßt. Einen breiteren Raum nimmt dann der Beweis des auch hier gültigen, übrigens nicht ganz leicht zugänglichen *Vertauschbarkeitssatzes* ein. Vier Flächen der betrachteten Art und ebenso die zu ihnen isometrischen erscheinen dabei durch einen viergliedrigen Transformationszyklus derart zusammengefügt, daß korrespondierende Flächenpunkte die Ecken eines räumlichen Gelenkvierecks mit paarweise gleichen Gegenseiten und *einem* Freiheitsgrade bilden, das durch das Bestehen der bilinearen Kosinusrelation zwischen seinen beiden Winkeln als *Bianchi-Viereck*[8]) charakterisiert ist.

---

[4]) *L. Bianchi*, Sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche, Rom Acc. Linc. Rend. **13** (1904), 283; Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni, Soc. Ital. delle Sc. (detta dei XL) (3) **13** (1904), 261.

[5]) *H. Jonas*, Die Ribaucoursche Transformation der sphärisch-elliptischen Geometrie als Transformationsprinzip im euklidischen Raume, Math. Ann. **107** (1932), 420.

[6]) Im Reellen gelingt die Zerlegung, wie bei anderer Gelegenheit gezeigt werden soll, im Falle der quadratischen Relation $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\vartheta^2=1$. Die damit definierte Flächenklasse übertrifft die nachstehend behandelten isometrischen Flächenpaare noch an Vielseitigkeit der geometrischen Beziehungen. Auf diese Flächen führt das Problem der wechselseitigen Stratifikabilität eines von zwei Variablen abhängigen, in sich starren Geradenpaares. Siehe *H. Jonas*, Über eine Klasse zweifach-unendlicher, durch Bewegung eines starren Geradenpaares erzeugter Systeme, Sitz. Ber. Berl. Math. Ges. **34** (1935), 52.

[7]) *H. Jonas*, Simultane Transformationen für gewisse Klassen von Raumkurven, J. f. d. reine u. angew. Math. **170** (1933), 95.

[8]) Vgl. dazu *H. Jonas*, Ein Schließungssatz für das Gelenkantiparallelogramm und seine räumliche Verallgemeinerung, Deutsche Math. **7** (1942), 152.

Wir befassen uns schließlich noch mit den besonderen hierher gehörigen Erscheinungen auf dem Gebiet der *pseudosphärischen Flächen*. Die Anwendung der aufgestellten Transformation auf das (als Grenzfall aufzufassende) Asymptotenliniennetz einer solchen Fläche liefert isometrische Paare der von Bianchi entdeckten Gattung, unter denen sich als speziellerer Fall auch das von Bianchi selber angegebene Beispiel findet, das sich an eine Biegungsfläche vom Typus einer imaginären Rotationsfläche zweiten Grades knüpft[9]). Zur Darlegung des geometrischen Sachverhalts erwies es sich dabei als notwendig, auf die Zusammensetzung der Bäcklund-Transformationen, insbesondere auf die zweier konjugiert-imaginärer einzugehen und die Eigenschaften der mit dem *viergliedrigen Bäcklund-Zyklus* verbundenen *Mittelkongruenz* ausführlicher zu erörtern. Einiges Interesse beanspruchen darf auch der an letzter Stelle, übrigens nicht mehr als direkte Anwendung unserer Transformationstheorie, dafür aber mit enger Bezugnahme auf den Anfang dieses einleitenden Artikels behandelte Fall, der einem viergliedrigen Bäcklund-Zyklus mit konjugiert-imaginären pseudosphärischen Flächen an gegenüberliegenden Plätzen entspricht und es erforderlich macht, die allgemeine Theorie der durch $\sum \xi \xi_1 = \text{const.}$ gekennzeichneten *W-Kongruenzen mit konstanter mittlerer Schränkung* heranzuziehen. Das Ergebnis ist ein von einem bewegten Bianchi-Viereck durchlaufenes System, in dem die einander gegenüberliegenden Ecken paarweise isometrische Tschebyschef-Netze beschreiben.

**2. Darstellung und Eigenschaften des Bianchischen Flächenpaares; die Differenzfläche.** Wir betrachten das auf das Tschebyschefsche Netz $(\alpha, \beta)$ bezogene Paar isometrischer Flächen $(x)$, $(\bar{x})$ mit dem Quadrat des Linienelements

$$\sum dx^2 = \sum d\bar{x}^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2. \tag{15}$$

Die Einheitsvektoren $X$ und $\bar{X}$ für die Richtungen der Flächennormalen sind durch die Formeln

$$X = \frac{1}{\sin\omega}(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta), \quad \bar{X} = \frac{1}{\sin\omega}(\bar{y}_\alpha \bar{z}_\beta - \bar{z}_\alpha \bar{y}_\beta) \tag{16}$$

gegeben, womit also, was wesentlich ist, Gleichstimmigkeit der Dreikante $(x_\alpha, x_\beta, X)$ und $(\bar{x}_\alpha, \bar{x}_\beta, \bar{X})$ besteht. Die zweiten Fundamentalgrößen sollen den Bedingungen[10])

$$L = \bar{L}, \quad N = \bar{N}, \quad M = \varepsilon \sin\omega, \quad \bar{M} = -\varepsilon \sin\omega \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{17}$$

unterworfen sein, auf Grund deren die Differentialgleichungen von Gauß und Codazzi die folgende Gestalt annehmen:

$$\omega_{\alpha\beta} = \sin\omega - \frac{LN}{\sin\omega}, \quad L_\beta = \frac{\omega_\alpha}{\sin\omega} N, \quad N_\alpha = \frac{\omega_\beta}{\sin\omega} L. \tag{18}$$

Weitere für unseren Zweck erforderliche Relationen schreiben wir für die Fläche $(x)$ mit dem Bemerken, daß *darin auftretendes* $\varepsilon (= \pm 1)$ *beim Übergang zu* $(\bar{x})$ *durch* $-\varepsilon$ *zu ersetzen ist.* Für die allgemeinen Entwicklungen genügt es, $\varepsilon = +1$ und in Verbindung mit den überstrichenen Größen $\varepsilon = -1$ zu lesen. Danach lautet die zweite Fundamentalform für $(x)$ bzw. $(\bar{x})$:

$$-\sum dx\, dX = L d\alpha^2 + 2\varepsilon \sin\omega\, d\alpha\, d\beta + N d\beta^2. \tag{19}$$

[9]) § 19 der zweiten unter [4]) angeführten Abhandlung. Auch hier gilt die Bemerkung, daß sich erst durch die Beseitigung gewisser Quadraturen der eigentliche geometrische Zusammenhang erschließt.

[10]) Ein zunächst bei $M$ und $\bar{M}$ noch möglicher konstanter Faktor wird durch geeignete Wahl der Längeneinheit beseitigt.

Für die zweiten Ableitungen der Koordinaten gelten die Formeln

$$(20)\quad x_{\alpha\alpha} = \operatorname{ctg}\omega\,\omega_\alpha x_\alpha - \frac{\omega_\alpha}{\sin\omega} x_\beta + LX,\; x_{\beta\beta} = -\frac{\omega_\beta}{\sin\omega} x_\alpha + \operatorname{ctg}\omega\,\omega_\beta x_\beta + NX,\; x_{\alpha\beta} = \varepsilon \sin\omega X,$$

von denen sich die dritte (unabhängig von der bei $\omega$ getroffenen Wahl des Vorzeichens) in der Form

$$(21)\qquad x_{\alpha\beta} = \varepsilon\,(y_\alpha z_\beta - z_\alpha y_\beta)$$

schreiben läßt. Es sei schon im voraus auf die Invarianz von $\varepsilon$ gegenüber der nachstehend entwickelten Transformation hingewiesen[11]). Hinzuzufügen sind noch die sogenannten Weingartenschen Gleichungen für den vorliegenden Fall:

$$(22)\quad \begin{cases} X_\alpha = -\dfrac{L}{\sin\omega}(x_\alpha - \cos\omega\, x_\beta) - \dfrac{\varepsilon}{\sin\omega}(x_\beta - \cos\omega\, x_\alpha), \\ X_\beta = -\dfrac{N}{\sin\omega}(x_\beta - \cos\omega\, x_\alpha) - \dfrac{\varepsilon}{\sin\omega}(x_\alpha - \cos\omega\, x_\beta). \end{cases}$$

Neben der in Nr. 1 erwähnten, aus (17) folgenden Eigenschaft des isometrischen Paares, daß in korrespondierenden Punkten die Kurven $\alpha = \text{const.}$ einerseits, $\beta = \text{const.}$ andrerseits gleiche Normalkrümmung besitzen, tritt noch ein an früherer Stelle [s. unter[5])] hergeleiteter Satz über die Torsionen: Für die Flächen $(x)$ und $(\bar{x})$ unterscheiden sich die Torsionen ihrer Kurven $\alpha = \text{const.}$ bzw. $\beta = \text{const.}$ jeweils durch einander entgegengesetzt gleiche Beträge vom Absolutwert 2.

Auch der a. a. O.[5]) gegebene Hinweis sei hier wiederholt, daß für diese Flächenpaare ein *Analogon zur Lieschen Transformation der pseudosphärischen Flächen* existiert. Durch

$$ds'^2 = c^2 d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + \frac{1}{c^3} d\beta^2, \quad L' = cL, \quad M' = \varepsilon \sin\omega, \quad N' = \frac{1}{c} N$$

ist nämlich ein isometrisches Paar der gleichen Klasse definiert, wobei man auch die Substitution $\alpha = \dfrac{\alpha'}{c}$, $\beta = c\beta'$ noch hinzunehmen kann.

Für das Folgende wichtig sind die Formeln, auf die man geführt wird, wenn man sich die Fläche $(x)$ auf der isometrischen $(\bar{x})$ als *rollend* vorstellt, wobei dann jedesmal die als gleichstimmig angesetzten begleitenden Dreikante zur Deckung kommen. Durch die orthogonale Matrix

$$(23)\qquad \begin{pmatrix} X^{(1)} & X^{(2)} & X^{(3)} \\ Y^{(1)} & Y^{(2)} & Y^{(3)} \\ Z^{(1)} & Z^{(2)} & Z^{(3)} \end{pmatrix} \quad (\Delta = +1)$$

werde die *Drehung* dargestellt, die das Dreikant der Koordinatenachsen $x, y, z$ in seine jeweilige Orientierung überführt: $X^{(1)}$ (d. h. $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$) ist der Richtungsvektor der bewegten $x$-Achse, und entsprechend nehmen $y$- und $z$-Achse die Richtungen $X^{(2)}$ und $X^{(3)}$ an. Es wird dann

$$(24)\quad \begin{cases} \bar{x}_\alpha = x_\alpha X^{(1)} + y_\alpha X^{(2)} + z_\alpha X^{(3)}, \\ \bar{y}_\alpha = x_\alpha Y^{(1)} + y_\alpha Y^{(2)} + z_\alpha Y^{(3)}, \\ \bar{z}_\alpha = x_\alpha Z^{(1)} + y_\alpha Z^{(2)} + z_\alpha Z^{(3)}, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \bar{x}_\beta = x_\beta X^{(1)} + y_\beta X^{(2)} + z_\beta X^{(3)} \\ \qquad\qquad \text{usw.} \\ \bar{X} = X X^{(1)} + Y X^{(2)} + Z X^{(3)} \\ \qquad\qquad \text{usw.,} \end{array}$$

wobei zu beachten ist, daß die auf das bewegte Achsensystem bezogenen Größen $x, y, z, x_\alpha, \ldots, x_\beta, \ldots, X, \ldots$ an der zyklischen Vertauschung *nicht* teilnehmen.

[11]) Es ist das eine ähnliche Erscheinung wie die Erhaltung des Windungssinns der Asymptotenlinien bei der asymptotischen Flächentransformation. Man kann übrigens das Gleichungstripel (21) zur Definition der Flächenklasse benutzen; $E_\beta = 0$, $G_\alpha = 0$ sind unmittelbare Folgen.

Setzt man in der üblichen Weise, für die *Vektoren* $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ geltend,

$$(25)\qquad \begin{cases} X^{(1)}_\alpha = r X^{(2)} - q X^{(3)}, & X^{(1)}_\beta = r' X^{(2)} - q' X^{(3)}, \\ X^{(2)}_\alpha = p X^{(3)} - r X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = p' X^{(3)} - r' X^{(1)}, \\ X^{(3)}_\alpha = q X^{(1)} - p X^{(2)}, & X^{(3)}_\beta = q' X^{(1)} - p' X^{(2)}, \end{cases}$$

so ergeben sich für die sechs *Rotationen* $p, q, r, p', q', r'$ bemerkenswerte Formeln. Wir bilden dazu $\bar{x}_{\alpha\alpha}$ und $\bar{x}_{\beta\beta}$ aus (24) mit Benutzung von (25) und stellen an Hand von (22) zunächst die Proportionalitäten $p = \lambda x_\alpha, \ldots, p' = \lambda' x_\beta, \ldots$ fest, ermitteln dann $\lambda$ und $\lambda'$ mit Hilfe von $\bar{x}_{\alpha\beta} = -\varepsilon \sin\omega \bar{X}$. Es wird

$$(26)\qquad p = -2\varepsilon x_\alpha,\ q = -2\varepsilon y_\alpha,\ r = -2\varepsilon z_\alpha;\ p' = 2\varepsilon x_\beta,\ q' = 2\varepsilon y_\beta,\ r' = 2\varepsilon z_\beta.$$

Die Rotationen, im allgemeinen Falle des Systems (25) den Bedingungen

$$p_\beta - p'_\alpha = q r' - r q' \text{ usw.}$$

genügend, erfüllen hier die spezielleren, mit (21) gleichwertigen

$$(27)\qquad p_\beta = -p'_\alpha = \frac{1}{2}(q r' - r q') \text{ usw.}$$

und außerdem infolge von $E = G = 1$ die quadratischen Relationen

$$(28)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = 4, \quad p'^2 + q'^2 + r'^2 = 4 \text{ [12]}.$$

*Differenzfläche* des isometrischen Flächenpaares $(x)$, $(\bar{x})$ der betrachteten Art[13]) nennen wir die durch vektorielle Subtraktion erhaltene Hilfsfläche $(\tilde{x})$:

$$(29)\qquad \tilde{x} = x - x.$$

Ihre Normale hat diejenige Richtung $\tilde{\xi}$ (d. h. also $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$), die mit entsprechenden Kanten der beiden begleitenden Dreikante $(x_\alpha, x_\beta, X)$ und $(\bar{x}_\alpha, \bar{x}_\beta, \bar{X})$ gleiche Winkel bildet:

$$(30)\qquad \tilde{\xi} = u x_\alpha + v x_\beta + w X = u \bar{x}_\alpha + v \bar{x}_\beta + w \bar{X}.$$

In der Tat wird dann

$$\Sigma \tilde{\xi} \tilde{x}_\alpha = \Sigma \tilde{\xi} x_\alpha - \Sigma \tilde{\xi} \bar{x}_\alpha = 0, \quad \Sigma \tilde{\xi} \tilde{x}_\beta = 0,$$

wie man erkennt, wenn man einmal den ersten und einmal den zweiten der Ausdrücke (30) für $\tilde{\xi}$ einsetzt. Auf dasselbe läuft es hinaus, wenn man $\tilde{\xi}$ als Achsenrichtung der durch (23) definierten Drehung auffaßt. Man erhält dann für die Verhältnisse von $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$ die drei miteinander verträglichen und mit dem Ansatz (30) gleichwertigen Gleichungen

$$(1 - X^{(1)})\tilde{\xi} - Y^{(1)}\tilde{\eta} - Z^{(1)}\tilde{\zeta} = 0, \quad -X^{(2)}\tilde{\xi} + (1 - Y^{(2)})\tilde{\eta} - Z^{(2)}\tilde{\zeta} = 0,$$
$$-X^{(3)}\tilde{\xi} - Y^{(3)}\tilde{\eta} + (1 - Z^{(3)})\tilde{\zeta} = 0,$$

deren Auflösung für das Folgende entbehrlich ist.

---

[12]) Auf die Verwandtschaft mit dem in einer früheren Arbeit untersuchten Fall der quadratischen Relationen

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{r^2}{c^2} = 1, \quad \frac{p'^2}{a^2} + \frac{q'^2}{b^2} - \frac{r'^2}{c^2} = 1$$

sei aufmerksam gemacht; siehe *H. Jonas*, Ausdehnung der Bianchi-Transformation $B_k$ auf gewisse zweifach-unendliche Systeme kongruenter einschaliger Hyperboloide und damit verbundene Normalenkongruenzen, Sitzgsber. Ak. Berlin 1934, S. 264.

[13]) Geometrisch anschaulicher würde natürlich die Betrachtung einer *Mittelfläche* sein, auf die gerade die Sonderfälle führen (s. im folg. die Nr. 8 und 9); dazu hätte man die eine Fläche des isometrischen Paares, etwa $(\bar{x})$, durch die symmetrische $(-\bar{x})$ zu ersetzen. Für den Aufbau der allgemeinen Transformationstheorie empfiehlt sich das aber nicht.

Wir stellen nun fest:

*Auf der Differenzfläche* $(\tilde{x})$ *bilden die Kurven* $(\alpha, \beta)$ *das Netz der Asymptotenlinien.*

Berechnet man nämlich $\Sigma \tilde{x}_{\alpha\alpha}\tilde{\xi} = \Sigma x_{\alpha\alpha}\tilde{\xi} - \Sigma \bar{x}_{\alpha\alpha}\tilde{\xi}$ mit Benutzung eines jeden der beiden Ausdrücke (30), so findet man $\Sigma \tilde{x}_{\alpha\alpha}\tilde{\xi} = 0$, entsprechend $\Sigma \tilde{x}_{\beta\beta}\tilde{\xi} = 0$.

**3. Aufstellung der Differentialgleichungen für die äquidistante Transformation des isometrischen Flächenpaars.** Ausgehend von einem als gegeben betrachteten, den Bedingungen (16), (17) genügenden Flächenpaar $(x)$, $(\bar{x})$, suchen wir ein gleichgeartetes Paar $(x_1)$, $(\bar{x}_1)$, für das in erster Linie also wieder

$$\Sigma dx_1^2 = \Sigma d\bar{x}_1^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega_1 d\alpha\, d\beta + d\beta^2 \tag{31}$$

sein soll, dadurch zu konstruieren, daß wir mit den Flächenpunkten $x$ und $\bar{x}$ in gleicher Orientierung zu den begleitenden Dreikanten Strahlensegmente $xx_1$ und $\bar{x}\bar{x}_1$ von konstanter und im allgemeinen verschiedener Länge verbinden. Wir setzen dementsprechend

$$x_1 = x + k\mathfrak{X}, \quad \bar{x}_1 = \bar{x} + \bar{k}\bar{\mathfrak{X}}, \tag{32}$$

wobei $k$, $\bar{k}$ Konstanten und $\mathfrak{X}$, $\bar{\mathfrak{X}}$ *Einheits*vektoren sind und überdies [s. (23)]:

$$\begin{gathered} \bar{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}X^{(1)} + \mathfrak{Y}X^{(2)} + \mathfrak{Z}X^{(3)}, \quad \bar{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{X}Y^{(1)} + \mathfrak{Y}Y^{(2)} + \mathfrak{Z}Y^{(3)}, \\ \bar{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{X}Z^{(1)} + \mathfrak{Y}Z^{(2)} + \mathfrak{Z}Z^{(3)} \end{gathered} \tag{33}$$

sein soll. Aus $\Sigma(x_{1\alpha})^2 = 1$, $\Sigma(x_{1\beta})^2 = 1$ erhalten wir zunächst

$$2\Sigma \mathfrak{X}_\alpha x_\alpha + k\Sigma(\mathfrak{X}_\alpha)^2 = 0, \quad 2\Sigma \mathfrak{X}_\beta x_\beta + k\Sigma(\mathfrak{X}_\beta)^2 = 0. \tag{34}$$

Zwecks Aufstellung der Differentialgleichungen unseres Transformationsproblems seien die Ableitungen des Einheitsvektors $\mathfrak{X}$ linear durch die drei (sicher nicht komplanaren) Vektoren $\mathfrak{X}$, $x_\alpha$, $\mathfrak{Y}z_\alpha - \mathfrak{Z}y_\alpha$ ausgedrückt. Dazu führen wir unter Berücksichtigung von (24) zwei Hilfsgrößen $S$, $S'$ ein, fügen aber noch die Definitionsformel für eine dritte $T$ hinzu, die weiterhin Verwendung finden wird:

$$\Sigma \mathfrak{X}x_\alpha = \Sigma \bar{\mathfrak{X}}\bar{x}_\alpha = S, \quad \Sigma \mathfrak{X}x_\beta = \Sigma \bar{\mathfrak{X}}\bar{x}_\beta = S', \quad \Sigma \mathfrak{X}X = \Sigma \bar{\mathfrak{X}}\bar{X} = T; \tag{35}$$

sie verbindet die Relation

$$S^2 - 2\cos\omega\, SS' + S'^2 = \sin^2\omega(1 - T^2), \tag{36}$$

die man durch Quadrieren der Determinante $(\mathfrak{X}, x_\alpha, x_\beta)$ bestätigt. Wir haben dann, wobei $a$, $b$, $a'$, $b'$ vorläufig die Rolle von noch zu untersuchenden Koeffizienten spielen,

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_\alpha = a(S\mathfrak{X} - x_\alpha) + b(\mathfrak{Y}z_\alpha - \mathfrak{Z}y_\alpha), \\ \mathfrak{X}_\beta = a'(S'\mathfrak{X} - x_\beta) + b'(\mathfrak{Y}z_\beta - \mathfrak{Z}y_\beta). \end{cases} \tag{37}$$

Bildet man auf Grund von (33) mit Benutzung von (24) bis (26) die Ableitungen von $\bar{\mathfrak{X}}$, so gelangt man nach einer leichten Umformung zu den analogen, als *Folge* von (37) bestehenden Relationen

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{X}}_\alpha = a(S\bar{\mathfrak{X}} - \bar{x}_\alpha) + \bar{b}(\bar{\mathfrak{Y}}\bar{z}_\alpha - \bar{\mathfrak{Z}}\bar{y}_\alpha), \\ \bar{\mathfrak{X}}_\beta = a'(S'\bar{\mathfrak{X}} - \bar{x}_\beta) + \bar{b}'(\bar{\mathfrak{Y}}\bar{z}_\beta - \bar{\mathfrak{Z}}\bar{y}_\beta) \end{cases} \tag{38}$$

mit

$$\bar{b} = b + 2\varepsilon, \quad \bar{b}' = b' - 2\varepsilon. \tag{39}$$

Aus (37) gewinnen wir die Hilfsformeln

$$\begin{cases} \Sigma(\mathfrak{X}_\alpha)^2 = (a^2 + b^2)(1 - S^2), & \Sigma(\mathfrak{X}_\beta)^2 = (a'^2 + b'^2)(1 - S'^2), \\ \Sigma \mathfrak{X}_\alpha x_\alpha = -a(1 - S^2), & \Sigma \mathfrak{X}_\beta x_\beta = -a'(1 - S'^2). \end{cases} \tag{40}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (34) ergeben sich zwei Ausdrücke für $k$, neben die wir, unter Beachtung von (38), (39) die entsprechenden für $\bar{k}$ stellen:

$$(41)\qquad k=\frac{2a}{a^2+b^2}=\frac{2a'}{a'^2+b'^2},\quad \bar{k}=\frac{2a}{a^2+(b+2\varepsilon)^2}=\frac{2a'}{a'^2+(b'-2\varepsilon)^2}.$$

Wir schließen aus der Konstanz von $k$ und $\bar{k}$ auf die von $a, b, a', b'$ und folgern weiter aus

$$(42)\qquad a(a'^2+b'^2)=a'(a^2+b^2).\quad ab'+ba'=\varepsilon(a-a'),$$

wenn auf Grund der zweiten Gleichung

$$a'(b+\varepsilon)=-a(b'-\varepsilon)=h$$

gesetzt wird, unter *vorläufigem* Ausschluß der Annahme $a=a'$[14]):

$$(43)\qquad b=\frac{h}{a'}-\varepsilon,\ b'=-\frac{h}{a}+\varepsilon,\ h=\sqrt{aa'(1-aa')};\ \bar{b}=\frac{h}{a'}+\varepsilon,\ \bar{b}'=-\frac{h}{a}-\varepsilon,$$

$$(44)\qquad k=\frac{2aa'}{a+a'-2\varepsilon h},\quad \bar{k}=\frac{2aa'}{a+a'+2\varepsilon h}.$$

Die gesuchte Transformation hängt danach von *zwei charakteristischen Konstanten* $a, a'$ und dem noch verfügbaren $\operatorname{sgn} h$ ab. Dieser letztere Umstand bedeutet eine gewisse Unbequemlichkeit, die sich dadurch beheben läßt, daß man von vornherein die beiden Verhältnisse

$$(45)\qquad c=\frac{b}{a},\quad c'=\frac{b'}{a'},$$

die im Verlauf der Entwicklungen auftreten werden, als gegeben annimmt; durch sie läßt sich auch $h$ rational ausdrücken. Vorteilhafter erscheint es, die Konstanten, die wir mit den bisherigen Bezeichnungen für die Rechnungen beibehalten wollen, durch zwei Parameter $\varkappa$, $n$ $(n>0)$, wie folgt, darzustellen:

$$(46)\qquad \begin{cases} a=n\cos\varkappa,\quad a'=\dfrac{\cos\varkappa}{n},\quad h=\sin\varkappa\cos\varkappa,\\ b=n\sin\varkappa-\varepsilon,\quad b'=-\dfrac{\sin\varkappa}{n}+\varepsilon;\quad \bar{b}=n\sin\varkappa+\varepsilon,\quad \bar{b}'=-\dfrac{\sin\varkappa}{n}-\varepsilon.\end{cases}$$

Die von dem Konstantenpaar abhängige *Transformation* $(\varkappa, n)$ des isometrischen Flächenpaars verlangt die Integration der Differentialgleichungen (37) mit der zusätzlichen Bedingung $\Sigma\mathfrak{X}^2=1$. Diese stellen zwar, da $S$ und $S'$ die drei unbekannten Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ enthalten, kein lineares homogenes System vor, lassen sich aber auf ein solches zurückführen. Man überzeugt sich davon, daß, die Gültigkeit von (37) vorausgesetzt,

$$(47)\qquad aS_\beta=a'S'_\alpha=aa'(SS'-\cos\omega)+h\sin\omega\, T$$

wird. Danach ist durch

$$(48)\qquad \ln\sigma=-\int(aSd\alpha+a'S'd\beta)$$

eine Hilfsgröße $\sigma$ (bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor) definiert. Wird jetzt

$$(49)\qquad \mathfrak{X}=\frac{\xi}{\sigma},\quad \mathfrak{Y}=\frac{\eta}{\sigma},\quad \mathfrak{Z}=\frac{\zeta}{\sigma}$$

gesetzt, so verwandelt sich (37) in das folgende *lineare und homogene System für die vier gesuchten Funktionen* $\xi, \eta, \zeta, \sigma$:

$$(50)\qquad \begin{cases} \xi_\alpha=-a\sigma x_\alpha+b(\eta z_\alpha-\zeta y_\alpha), & \xi_\beta=-a'\sigma x_\beta+b'(\eta z_\beta-\zeta y_\beta),\\ \eta_\alpha=-a\sigma y_\alpha+b(\zeta x_\alpha-\xi z_\alpha), & \eta_\beta=-a'\sigma y_\beta+b'(\zeta x_\beta-\xi z_\beta),\\ \zeta_\alpha=-a\sigma z_\alpha+b(\xi y_\alpha-\eta x_\alpha), & \zeta_\beta=-a'\sigma z_\beta+b'(\xi y_\beta-\eta x_\beta),\\ \sigma_\alpha=-a(\xi x_\alpha+\eta y_\alpha+\zeta z_\alpha), & \sigma_\beta=-a'(\xi x_\beta+\eta y_\beta+\zeta z_\beta);\end{cases}$$

[14]) Man findet nämlich $(a-a')\,[h^2-aa'(1-aa')]=0$.

dazu tritt, mit dem System vereinbar, die ***Relation***

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\sigma^2. \tag{51}$$

Damit die aus (50) auf doppelte Weise gebildeten gemischten zweiten Ableitungen unter Heranziehung von (21) identisch werden, müssen die Gleichungen

$$ab'+ba'-\varepsilon(a-a')=0, \quad aa'-bb'+\varepsilon(b-b')=0$$

bestehen. Die erste fällt mit der zweiten der Relationen (42) zusammen, die zweite ist gleichfalls Folge von (43) bzw. (46). Beide sind auch im *Spezialfall* $a=a'$ erfüllt, der also *zulässig* ist. Das lineare homogene System (50) ist hiernach unbeschränkt integrabel; die quadratische Relation (52) hat die Bedeutung einer Anfangsbedingung[15]). Die Transformation $(\varkappa, n)$ hängt also noch von zwei verfügbaren Konstanten ab, so daß man für ein anfängliches Wertepaar $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ die Richtung $\mathfrak{X}$ vorschreiben kann.

Um $\cos\omega_1$ für das transformierte Flächenpaar zu berechnen, stellen wir mittels (37) und (35) noch die folgenden Hilfsformeln auf:

$$\begin{aligned} &\Sigma\,\mathfrak{X}_\alpha\mathfrak{X}_\beta=\frac{2\varepsilon}{k}\left[-h(SS'-\cos\omega)+aa'\sin\omega T\right],\\ &\Sigma\,\mathfrak{X}_\alpha x_\beta=a(SS'-\cos\omega)+b\sin\omega T,\quad \Sigma\,\mathfrak{X}_\beta x_\alpha=a'(SS'-\cos\omega)-b'\sin\omega T. \end{aligned} \tag{52}$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \cos\omega_1=\Sigma\,x_{1\alpha}x_{1\beta}&=\Sigma\,(x_\alpha+k\,\mathfrak{X}_\alpha)\,(x_\beta+k\,\mathfrak{X}_\beta)\\ &=\cos\omega+k(a+a'-2\varepsilon h)(SS'-\cos\omega)+k(b-b'+2\varepsilon aa')\sin\omega T \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung von (43), (44)

$$\cos\omega_1-\cos\omega=2aa'(SS'-\cos\omega)+2h\sin\omega T. \tag{53}$$

An Hand von (47), (48) geben wir dieser Formel noch die für später wichtige Gestalt

$$\cos\omega_1-\cos\omega=-2(\ln\sigma)_{\alpha\beta}. \tag{54}$$

Daß für $(\bar{x}_1)$ das gleiche $\omega_1$ gilt, folgt, wobei wir uns auf das Bestehen des Systems (38) als Folge von (37) berufen, aus dem Umstande, daß $\varepsilon$ in (53) nicht vorkommt.

**4. Ergänzungen: Invarianz von $\varepsilon$; inverse Operation; Differenzflächen im Falle $k=\bar{k}$; neue Form der Differentialgleichungen.** Nachdem wir (31), d. h. die Isometrie für das transformierte Flächenpaar $(x_1)$, $(\bar{x}_1)$ bestätigt haben, bedarf es noch des Nachweises, daß gemäß (17) wieder $L_1=\bar{L}_1$, $N_1=\bar{N}_1$ wird und außerdem analog zu (20) und zwar, was bemerkenswert erscheint, mit demselben $\varepsilon(=\pm 1)$

$$x_{1\alpha\beta}=\varepsilon(y_{1\alpha}z_{1\beta}-z_{1\alpha}y_{1\beta}), \tag{55}$$

d. h. also, wenn der Richtungssinn der Normalenvektoren $X_1$ und $\bar{X}_1$ wieder wie in (16) festgelegt wird, $M_1=\varepsilon\sin\omega_1=-\bar{M}_1$. Um die erforderliche Rechnung möglichst einzuschränken, bestimmen wir zunächst mit Benutzung von (52) die dreireihige Determinante

$$\begin{aligned} (x_{1\alpha}, x_{1\beta}, \mathfrak{X})&=(x_\alpha+k\,\mathfrak{X}_\alpha, x_\beta+k\,\mathfrak{X}_\beta, \mathfrak{X})\\ &=k\left[b-b'+k(ab'-ba')\right](SS'-\cos\omega)+\left[1-k(a+a')+k(aa'+bb')\right]\sin\omega T. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten gewinnt man aus (43), (44) die Umformungen

$$k\left[b-b'+k(ab'-ba')\right]=2h, \quad k\left[a+a'-k(aa'+bb')\right]=2aa',$$

so daß wir mit Berücksichtigung des soeben über $X_1$ und $\bar{X}_1$ Bemerkten

$$\sin\omega_1\Sigma\,\mathfrak{X}X_1=2h(SS'-\cos\omega)+(1-2aa')\sin\omega T \tag{56}$$

[15]) Allgemein hat das System (50) eine Relation von der Form $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\sigma^2=\text{const.}$ zur Folge.

erhalten und, da $\varepsilon$ in dieser Formel nicht auftritt, auf $\Sigma \mathfrak{X} X_1 = \Sigma \bar{\mathfrak{X}} \bar{X}_1$ schließen. Wir differenzieren nun von den aus (32), (35) unmittelbar zu entnehmenden Beziehungen

$$\Sigma \mathfrak{X} x_{1\alpha} = S, \quad \Sigma \mathfrak{X} x_{1\beta} = S' \tag{57}$$

die erste nach $\beta$, beachten, daß infolge der Tschebyschefschen Form des Linienelements auf jeden Fall $x_{1\alpha\beta} = M_1 X_1$ ist, und finden

$$M_1 \Sigma \mathfrak{X} X_1 + \Sigma \mathfrak{X}_\beta (x_\alpha + k \mathfrak{X}_\beta) = S_\beta,$$

hieraus durch Einsetzen der aus (52), (54) entnommenen Werte von $\Sigma \mathfrak{X}_\beta x_\alpha$, $\Sigma \mathfrak{X}_\alpha \mathfrak{X}_\beta$ und $S_\beta$

$$M_1 \Sigma \mathfrak{X} X_1 = \varepsilon [2h(SS' - \cos\omega) + (1 - 2aa') \sin\omega\, T],$$

also [vgl. (56)]

$$M_1 = \varepsilon \sin\omega_1.$$

Um zu zeigen, daß $L_1$ von $\varepsilon$ unabhängig ist, differenziert man die erste Formel (57) nach $\alpha$ und setzt für $x_{1\alpha\alpha}$ den durch (20) gegebenen, für den Index 1 geschriebenen Ausdruck ein; der Nachweis ist damit für $L_1 \Sigma \mathfrak{X} X_1$ erbracht. Diese Feststellung genügt; die etwas umständlichen Formeln für $L_1$, $N_1$ sind für das weitere nicht erforderlich.

Die zu der gefundenen Transformation *inverse*, also der Übergang von dem Flächenpaar $(x_1)$, $(\bar{x}_1)$ zu dem ursprünglichen $(x)$, $(\bar{x})$, ist ein völlig gleichartiger analytischer Prozeß und gehört zu denselben Werten der charakteristischen Konstanten. Substituiert man nämlich in (37)

$$x \,|\, x_1, \quad \mathfrak{X} \,|\, -\mathfrak{X}$$

und im Hinblick auf (57)

$$S \,|\, -S, \quad S' \,|\, -S',$$

so hat man zu schreiben:

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_\alpha = -a(S\mathfrak{X} - x_{1\alpha}) + b(\mathfrak{Y} z_{1\alpha} - \mathfrak{Z} y_{1\alpha}), \\ \mathfrak{X}_\beta = -a'(S'\mathfrak{X} - x_{1\beta}) + b'(\mathfrak{Y} z_{1\beta} - \mathfrak{Z} y_{1\beta}). \end{cases} \tag{58}$$

Das tatsächliche Bestehen dieser Differentialrelationen weist man mit wenig Rechnung an Hand von (32) und (37) nach.

Der leichteren Übersicht wegen fassen wir das bisherige Ergebnis zusammen: *Genügt das isometrische Flächenpaar $(x)$, $(\bar{x})$ den besonderen Bedingungen*

$$\Sigma dx^2 = \Sigma d\bar{x}^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2,$$

$$L = \bar{L}, \quad N = \bar{N}, \quad M = \varepsilon \sin\omega = -\bar{M} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

*so gelangt man zu einem neuen Flächenpaar $(x_1)$, $(\bar{x}_1)$ von gleicher Eigenschaft und mit demselben $\varepsilon$ durch simultane äquidistante Transformationen (zwei charakteristische Konstanten $a, a'$; $h = \sqrt{aa'(1-aa')}$):*

$$x_1 = x + k\mathfrak{X}, \quad \bar{x}_1 = \bar{x} + \bar{k}\bar{\mathfrak{X}}, \quad k = \frac{2aa'}{a + a' - 2\varepsilon h}, \quad \bar{k} = \frac{2aa'}{a + a' + 2\varepsilon h};$$

*dabei muß der Einheitsvektor $\mathfrak{X}$ das System der Differentialgleichungen*

$$\mathfrak{X}_\alpha = a(S\mathfrak{X} - x_\alpha) + h(\mathfrak{Y} z_\alpha - \mathfrak{Z} y_\alpha), \quad \mathfrak{X}_\beta = a'(S'\mathfrak{X} - x_\beta) + b'(\mathfrak{Y} z_\beta - \mathfrak{Z} y_\beta)$$

$$\left(\Sigma \mathfrak{X}^2 = 1; \quad S = \Sigma \mathfrak{X} x_\alpha, \quad S' = \Sigma \mathfrak{X} x_\beta; \quad b = \frac{h}{a'} - \varepsilon, \quad b' = -\frac{h}{a} + \varepsilon\right)$$

*erfüllen, an dessen Stelle das lineare und homogene System (50) mit der quadratischen Relation (51) treten kann; die Richtung $\bar{\mathfrak{X}}$ hat in bezug auf das begleitende Dreikant $(\bar{x}_\alpha, \bar{x}_\beta, \bar{X})$ der Fläche $(\bar{x})$ die gleiche Orientierung wie $\mathfrak{X}$ in bezug auf das Dreikant $(x_\alpha, x_\beta, X)$ von $(x)$.*

Wir beweisen nun den folgenden Zusatz, der zugleich kennzeichnend für die allgemeinere Natur unserer neuen Transformation ist:

*Unter der Voraussetzung $aa' = 1$ ($h = 0$), d. i. im Spezialfalle ($\varkappa = 0$, $n$) gleicher konstanter Abstände $k = \bar{k}$, hängt die Differenzfläche des gegebenen Flächenpaares mit der des transformierten durch eine asymptotische Transformation, also durch eine sie beide berührende W-Kongruenz zusammen.*

Für $k = \bar{k}$ wird nämlich [s. (29)]

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x} = x_1 - \bar{x}_1 - (x - \bar{x}) = k(\mathfrak{X} - \bar{\mathfrak{X}}).$$

Benutzt man für den Normalenvektor $\tilde{\xi}$ von $(\tilde{x})$ wieder die doppelte Darstellung (30) und berücksichtigt die doppelten Ausdrücke (35), so ergibt sich

$$\Sigma \tilde{\xi}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}) = k[\Sigma \mathfrak{X}(u x_\alpha + v x_\beta + w X) - \Sigma \bar{\mathfrak{X}}(u \bar{x}_\alpha + v \bar{x}_\beta + w \bar{X})] = 0.$$

Danach ist die Verbindungslinie $\tilde{x}\tilde{x}_1$ Tangente von $(\tilde{x})$ und, da wir uns auf die Umkehrbarkeit der Transformation stützen dürfen, auch Tangente an $(\tilde{x}_1)$. Daß die Kurven $(\alpha, \beta)$ auf den Differenzflächen die Asymptotenlinien vorstellen, wurde am Schluß von Nr. 2 gezeigt.

Durch eine *weitere Form, deren das System der totalen Differentialgleichungen unserer Transformation fähig ist,* erscheinen diese verschiedenen bekannten Transformationen für besondere Flächenklassen näher gerückt. Wir gehen von den drei Formeln (35) aus, setzen noch

$$\tau = \sigma T, \tag{59}$$

erinnern an (48), d. h. an die Relationen

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} = -a S, \quad \frac{\sigma_\beta}{\sigma} = -a' S', \tag{60}$$

ferner an die Einführung der $\xi$, $\eta$, $\zeta$ durch (49). Wir differenzieren

$$\sigma_\alpha = -a \Sigma \xi x_\alpha, \quad \sigma_\beta = -a' \Sigma \xi x_\beta, \quad \tau = \Sigma \xi X, \tag{61}$$

links formal, rechts mit Benutzung der Formeln (20), (21) sowie der durch (50) gegebenen Ableitungen von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, und erhalten das folgende, $\varepsilon$ nicht enthaltende System unter Hinzufügung der aus (51) hervorgehenden bzw. mit (36) gleichwertigen quadratischen Relation:

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha} &= \operatorname{ctg}\omega\, \omega_\alpha \sigma_\alpha - \frac{a}{a'}\frac{\omega_\alpha}{\sin\omega}\sigma_\beta + a^2\sigma - aL\tau,\\
\sigma_{\alpha\beta} &= aa'\cos\omega\,\sigma - h\sin\omega\,\tau,\\
\sigma_{\beta\beta} &= -\frac{a'}{a}\frac{\omega_\beta}{\sin\omega}\sigma_\alpha + \operatorname{ctg}\omega\,\omega_\beta\sigma_\beta + a'^2\sigma - a'N\tau,\\
\tau_\alpha &= \frac{L}{\sin^2\omega}\left(\frac{\sigma_\alpha}{a} - \cos\omega\frac{\sigma_\beta}{a'}\right) + \frac{h}{\sin\omega}\left(\frac{\sigma_\beta}{a'} - \cos\omega\frac{\sigma_\alpha}{a}\right),\\
\tau_\beta &= \frac{N}{\sin^2\omega}\left(\frac{\sigma_\beta}{a'} - \cos\omega\frac{\sigma_\alpha}{a}\right) + \frac{h}{\sin\omega}\left(\frac{\sigma_\alpha}{a} - \cos\omega\frac{\sigma_\beta}{a'}\right),\\
&\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{(\sigma_\alpha)^2}{a^2} - 2\cos\omega\frac{\sigma_\alpha\sigma_\beta}{aa'} + \frac{(\sigma_\beta)^2}{a'^2}\right) + \tau^2 = \sigma^2.
\end{aligned}\right. \tag{62}$$

Durch Auflösen der Gleichungen (61) nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ergibt sich als Darstellung der beiden Einheitsvektoren $\mathfrak{X}$ und $\bar{\mathfrak{X}}$:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= -\frac{1}{\sigma\sin^2\omega}\left[\left(\frac{\sigma_\alpha}{a} - \cos\omega\frac{\sigma_\beta}{a'}\right)x_\alpha + \left(\frac{\sigma_\beta}{a'} - \cos\omega\frac{\sigma_\alpha}{a}\right)x_\beta\right] + \frac{\tau}{\sigma}X,\\
\bar{\mathfrak{X}} &= -\frac{1}{\sigma\sin^2\omega}\left[\left(\frac{\sigma_\alpha}{a} - \cos\omega\frac{\sigma_\beta}{a'}\right)\bar{x}_\alpha + \left(\frac{\sigma_\beta}{a'} - \cos\omega\frac{\sigma_\alpha}{a}\right)\bar{x}_\beta\right] + \frac{\tau}{\sigma}\bar{X}.
\end{aligned}\right. \tag{63}$$

$\varepsilon$ tritt jetzt explizite also nur in $k$ und $\bar{k}$ auf.

Hinzugefügt sei noch die Feststellung, daß *die beiden, die simultanen Transformationen* $(\varkappa, n)$ *vermittelnden Strahlenkongruenzen im Spezialfalle* $a = a'$, *d. i.* $n = 1$, *Normalensysteme werden.* Für die Orthogonalflächen $(x^{(0)})$, $(\bar{x}^{(0)})$ erhält man dabei

$$x^{(0)} = x + t\mathfrak{X}, \quad \bar{x}^{(0)} = \bar{x} + \bar{t}\bar{\mathfrak{X}}, \quad t = \frac{1}{a}\ln\sigma + \text{const.}^{16)}. \tag{64}$$

**5. Aufstellung der Hauptformeln des Vertauschbarkeitssatzes.** Wir wenden uns zu der, wie schon in der Einleitung erwähnt, nicht ganz mühelosen Herleitung desjenigen Satzes, der die Zusammensetzung der Transformationen $(\varkappa, n)$ beherrscht und (unter Ausschluß übereinstimmender Konstantenpaare) die Bildung viergliedriger Zyklen ermöglicht. Da die charakteristischen Konstanten derjenigen Transformationen, die im Zyklus gegenüberliegende Plätze einnehmen, die gleichen sind, so ist auch hier der von Bianchi geprägte Name *Vertauschbarkeitssatz* zutreffend.

Mit besonderem Vorteil gehen wir von den aus (32), (37) leicht herstellbaren Formelsystemen aus, die zwischen den Einheitsvektoren der Tangentenrichtungen $x_\alpha$ und $x_{1\alpha}$ einerseits, $x_\beta$ und $x_{1\beta}$ andrerseits vermitteln. Abkürzend führen wir wie bereits in (45)

$$c = \frac{a}{b}, \quad c' = \frac{a'}{b'} \tag{65}$$

ein. Es wird dann

$$\left\{\begin{aligned} x_{1\alpha} &= \frac{1}{c^2+1}\left[(c^2+\mathfrak{X}^2-\mathfrak{Y}^2-\mathfrak{Z}^2)x_\alpha + 2(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}-c\,\mathfrak{Z})y_\alpha + 2(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}+c\mathfrak{Y})z_\alpha\right],\\ y_{1\alpha} &= \frac{1}{c^2+1}\left[2(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+c\,\mathfrak{Z})x_\alpha + (c^2+\mathfrak{Y}^2-\mathfrak{Z}^2-\mathfrak{X}^2)y_\alpha + 2(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}-c\,\mathfrak{X})z_\alpha\right],\\ z_{1\alpha} &= \frac{1}{c^2+1}\left[2(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}-c\mathfrak{Y})x_\alpha + 2(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}+c\,\mathfrak{X})y_\alpha + (c^2+\mathfrak{Z}^2-\mathfrak{X}^2-\mathfrak{Y}^2)z_\alpha\right]; \end{aligned}\right. \tag{66}$$

in den entsprechend lautenden Formeln für die Ableitungen nach $\beta$ steht $c'$ an Stelle von $c$. Man erkennt in (66), wenn noch berücksichtigt wird, daß der Nenner

$$c^2 + 1 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 + c^2$$

ist, die Darstellung einer *Drehung* durch die *vier Eulerschen Parameter* $\lambda = \mathfrak{X}$, $\mu = \mathfrak{Y}$, $\nu = \mathfrak{Z}$, $\varrho = c$. Wir schreiben, vektoriell aufzufassen und mit nachgestelltem Operator, in unmittelbar verständlicher Symbolik:

$$x_{1\alpha} = x_\alpha\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, c\}, \quad x_{1\beta} = x_\beta\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, c'\}. \tag{67}$$

Geometrisch bedeutet dies: Die Tangentenrichtung $x_\alpha$ von $(x)$ geht in die Tangente $x_{1\alpha}$ von $(x_1)$ dadurch über, daß man den Einheitsvektor $x_\alpha$ längs des Strahlensegments $xx_1$ parallel verschiebt (es ist $\Sigma\mathfrak{X}x_\alpha = \Sigma\mathfrak{X}x_{1\alpha}$) und dann einer Drehung um den Strahl (Drehungsachse also $\mathfrak{X}$) unterwirft, deren konstanter, im positiven Sinne zu rechnender Winkel $\Gamma$ durch

$$\operatorname{ctg}\frac{\Gamma}{2} = c \tag{68}$$

bestimmt ist[17]). Entsprechendes gilt für $x_\beta$, $x_{1\beta}$, $c'$.

---

[16]) Die Linienelemente der beiden Bildkugeln $(\mathfrak{X})$, $(\tilde{\mathfrak{X}})$ unterscheiden sich dann nur durch das Vorzeichen der mittleren Koeffizienten. Man findet, da $S = -t_\alpha$, $S' = -t_\beta$ ist, aus (40), (52) in Verbindung mit (36):

$$e = \bar{e} = \frac{2a}{k}[1-(t_\alpha)^2], \quad g = \bar{g} = \frac{2a}{k}[1-(t_\beta)^2, \quad f = -\bar{f}, \quad eg - f^2 = \frac{4a^2}{k^2}(t_{\alpha\beta})^2.$$

Auch im allgemeinen Falle ist, wobei etwa $\sigma = e^\theta$ zu setzen wäre, eine selbständige Behandlung der betreffenden Kongruenzen möglich; die sämtlichen Kummerschen Fundamentalgrößen [s. gleichfalls (40), (52)] lassen sich durch $\theta_\alpha$, $\theta_\beta$, $\theta_{\alpha\beta}$ allein ausdrücken. Die Gaußsche Relation für die Kugel führt auf eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung für die einzige gesuchte Funktion $\theta$.

[17]) Macht man nämlich den Strahl $\mathfrak{X}$ zur $z$-Achse ($\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 0$, $\mathfrak{Z} = 1$), so lauten die Gleichungen (66):

$$x_{1\alpha} = \frac{c^2-1}{c^2+1}x_\alpha - \frac{2c}{c^2+1}y_\alpha, \quad y_{1\alpha} = \frac{2c}{c^2+1}x_\alpha + \frac{c^2-1}{c^2+1}y_\alpha, \quad z_{1\alpha} = z_\alpha.$$

Bei den nun folgenden Entwicklungen fassen wir zunächst nur die *eine* Fläche $(x)$ des gegebenen isometrischen Paares ins Auge. Die Ergänzung, die sich auf den gleichzeitig aus $(\bar{x})$ hervorgehenden Zyklus bezieht, findet sich in Nr. 7. Die Fläche $(x)$ werde also zwei Transformationen $(\varkappa_1, n_1)$ und $(\varkappa_2, n_2)$ unterworfen, die sie in $(x_1)$ und $(x_2)$ überführen. Die Konstanten sowie den vermittelnden Einheitsvektor $\mathfrak{X}$ versehen wir mit dem Index 1 bzw. 2. Es gelten also die Formeln

$$(69)\qquad \begin{cases} h_1 = \sqrt{a_1 a_1'(1-a_1 a_1')}, \quad b_1 = \dfrac{h_1}{a_1'} - \varepsilon, \quad b_1' = -\dfrac{h_1}{a_1} + \varepsilon; \quad c_1 = \dfrac{b_1}{a_1}, \quad c_1' = \dfrac{b_1'}{a_1'}; \\ k_1 = \dfrac{2a_1}{a_1^2 + b_1^2} = \dfrac{2a_1'}{a_1'^2 + b_1'^2} = \dfrac{2a_1 a_1'}{a_1 + a_1' - 2\varepsilon h_1} \end{cases}$$

und gleichlautende für den Index 2; außerdem wird

$$(70)\qquad \begin{cases} x_1 = x + k_1 \mathfrak{X}_1, \quad x_{1\alpha} = x_\alpha\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, c_1\}, \quad x_{1\beta} = x_\beta\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, c_1'\}, \\ x_2 = x + k_2 \mathfrak{X}_2, \quad x_{2\alpha} = x_\alpha\{\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2, c_2\}, \quad x_{2\beta} = x_\beta\{\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2, c_2'\}. \end{cases}$$

Verlangt wird nun, daß unter *Vertauschung der Konstantenpaare* eine Transformation $(\varkappa_2, n_2)$ existiert, die auf $(x_1)$ angewendet die gleiche Fläche $(x^*)$ liefert wie eine gewisse $(\varkappa_1, n_1)$, auf $(x_2)$ angewendet. Wir schreiben unter Einführung der beiden zugehörigen Einheitsvektoren $\hat{\mathfrak{X}}_2$, $\hat{\mathfrak{X}}_1$ die Bedingungen dafür:

$$(71)\qquad x^* = x_1 + k_2 \hat{\mathfrak{X}}_2 = x_2 + k_1 \hat{\mathfrak{X}}_1,$$

$$(72)\qquad \begin{cases} x_\alpha^* = x_{1\alpha}\{\hat{\mathfrak{X}}_2, \hat{\mathfrak{Y}}_2, \hat{\mathfrak{Z}}_2, c_2\} = x_{2\alpha}\{\hat{\mathfrak{X}}_1, \hat{\mathfrak{Y}}_1, \hat{\mathfrak{Z}}_1, c_1\}, \\ x_\beta^* = x_{1\beta}\{\hat{\mathfrak{X}}_2, \hat{\mathfrak{Y}}_2, \hat{\mathfrak{Z}}_2, c_2'\} = x_{2\beta}\{\hat{\mathfrak{X}}_1, \hat{\mathfrak{Y}}_1, \hat{\mathfrak{Z}}_1, c_1'\}. \end{cases}$$

Danach muß also

$$(73)\qquad k_1 \mathfrak{X}_1 + k_2 \hat{\mathfrak{X}}_2 = k_2 \mathfrak{X}_2 + k_1 \hat{\mathfrak{X}}_1$$

werden, und außerdem muß gemäß der symbolischen Relation

$$(74)\qquad \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1, c_1\}\{\hat{\mathfrak{X}}_2, \hat{\mathfrak{Y}}_2, \hat{\mathfrak{Z}}_2, c_2\} = \{\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2, c_2\}\{\hat{\mathfrak{X}}_1, \hat{\mathfrak{Y}}_1, \hat{\mathfrak{Z}}_1, c_1\},$$

die auch für $c_1'$, $c_2'$ an Stelle von $c_1$, $c_2$ gültig sein soll, das Ergebnis der auf doppelte Weise erfolgenden Zusammensetzung der Drehungen das gleiche sein.

Die Eulerschen Parameter $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ für die durch

$$(75)\qquad \{\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \varrho_1\}\{\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \varrho_2\} = \{\lambda, \mu, \nu, \varrho\}$$

definierte resultierende Drehung sind durch die bekannten Formeln

$$(76)\qquad \begin{cases} \lambda = \mu_1 \nu_2 + \nu_1 \mu_2 - \lambda_1 \varrho_2 - \varrho_1 \lambda_2, \\ \mu = \nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2 - \mu_1 \varrho_2 - \varrho_1 \mu_2, \\ \nu = \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2 - \nu_1 \varrho_2 - \varrho_1 \nu_2, \\ \varrho = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 - \varrho_1 \varrho_2 \end{cases}$$

gegeben, neben denen als Folge noch die für den gemeinsamen Nenner der Koeffizienten in Betracht kommende Beziehung

$$(77)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = (\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 + \varrho_1^2)(\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \varrho_2^2)$$

angemerkt sei. Damit haben wir dann neben (73), ausführlich geschrieben:

$$(78)\qquad \begin{cases} k_1 \mathfrak{X}_1 + k_2 \hat{\mathfrak{X}}_2 = k_2 \mathfrak{X}_2 + k_1 \hat{\mathfrak{X}}_1, \\ k_1 \mathfrak{Y}_1 + k_2 \hat{\mathfrak{Y}}_2 = k_2 \mathfrak{Y}_2 + k_1 \hat{\mathfrak{Y}}_1, \\ k_1 \mathfrak{Z}_1 + k_2 \hat{\mathfrak{Z}}_2 = k_2 \mathfrak{Z}_2 + k_1 \hat{\mathfrak{Z}}_1, \end{cases}$$

die zweite, durch (74) geforderte Gruppe von Gleichungen:

$$(79)\quad \begin{cases} \mathfrak{Y}_1\hat{\mathfrak{Z}}_2-\mathfrak{Z}_1\hat{\mathfrak{Y}}_2-c_2\mathfrak{X}_1-c_1\hat{\mathfrak{X}}_2=\mathfrak{Y}_2\hat{\mathfrak{Z}}_1-\mathfrak{Z}_2\hat{\mathfrak{Y}}_1-c_1\mathfrak{X}_2-c_2\hat{\mathfrak{X}}_1, \\ \mathfrak{Z}_1\hat{\mathfrak{X}}_2-\mathfrak{X}_1\hat{\mathfrak{Z}}_2-c_2\mathfrak{Y}_1-c_1\hat{\mathfrak{Y}}_2=\mathfrak{Z}_2\hat{\mathfrak{X}}_1-\mathfrak{X}_2\hat{\mathfrak{Z}}_1-c_1\mathfrak{Y}_2-c_2\hat{\mathfrak{Y}}_1, \\ \mathfrak{X}_1\hat{\mathfrak{Y}}_2-\mathfrak{Y}_1\hat{\mathfrak{X}}_2-c_2\mathfrak{Z}_1-c_1\hat{\mathfrak{Z}}_2=\mathfrak{X}_2\hat{\mathfrak{Y}}_1-\mathfrak{Y}_2\hat{\mathfrak{X}}_1-c_1\mathfrak{Z}_2-c_2\hat{\mathfrak{Z}}_1, \\ \mathfrak{X}_1\hat{\mathfrak{X}}_2+\mathfrak{Y}_1\hat{\mathfrak{Y}}_2+\mathfrak{Z}_1\hat{\mathfrak{Z}}_2 \qquad =\mathfrak{X}_2\hat{\mathfrak{X}}_1+\mathfrak{Y}_2\hat{\mathfrak{Y}}_1+\mathfrak{Z}_2\hat{\mathfrak{Z}}_1, \end{cases}$$

wobei in der vierten das auf beiden Seiten auftretende Glied $-c_1c_2$ unterdrückt ist. Wichtig ist die Feststellung, daß aus (79) im Verein mit (78) unmittelbar auch auf das Bestehen von (79) für $c_1'$, $c_2'$ geschlossen werden kann. Es ist nämlich als Folge von (69)

$$(80)\qquad k_1(c_1'-c_1)=2\varepsilon,\quad k_2(c_2'-c_2)=2\varepsilon,$$

und damit erhält man aus (78) in der Tat

$$c_2(\mathfrak{X}_1-\hat{\mathfrak{X}}_1)-c_1(\mathfrak{X}_2-\hat{\mathfrak{X}}_2)=c_2'(\mathfrak{X}_1-\hat{\mathfrak{X}}_1)-c_1'(\mathfrak{X}_2-\hat{\mathfrak{X}}_2).$$

Es wird sich alsbald zeigen, daß die für die beiden Einheitsvektoren $\hat{\mathfrak{X}}_2$, $\hat{\mathfrak{X}}_1$ aufgestellten Gleichungen miteinander verträglich sind und zur Bestimmung des Punktes $x^*$ auf der vierten Fläche des Zyklus ausreichen. Der dann noch zu liefernde Nachweis, daß $(x_1)$, $(x^*)$ und $(x_2)$, $(x^*)$ durch Transformationen der bezeichneten Art zusammenhängen, macht natürlich den nachträglichen Übergang zu den Differentialquotienten erforderlich.

Der Vektor $\Xi$ (d. h. $\Xi$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$, *nicht* Einheitsvektor) werde jetzt durch

$$(81)\qquad x^*-x=\Xi$$

eingeführt. Die aus (70), (71) entnommenen, (78) befriedigenden Ausdrücke

$$(82)\qquad \hat{\mathfrak{X}}_2=\frac{1}{k_2}(\Xi-k_1\mathfrak{X}_1),\quad \hat{\mathfrak{X}}_1=\frac{1}{k_1}(\Xi-k_2\mathfrak{X}_2)$$

tragen wir in (79) ein und finden auf Grund der ersten drei Gleichungen

$$(83)\quad (\Xi-k_1\mathfrak{X}_1-k_2\mathfrak{X}_2)(k_1c_1-k_2c_2)+\mathsf{H}(k_1\mathfrak{Z}_1-k_2\mathfrak{Z}_2)-\mathsf{Z}(k_1\mathfrak{Y}_1-k_2\mathfrak{Y}_2)=0$$

sowie zwei weitere, hieraus durch zyklische Permutation hervorgehende Beziehungen, während die vierte Gleichung (79) sich in

$$(84)\qquad \Xi(k_1\mathfrak{X}_1-k_2\mathfrak{X}_2)+\mathsf{H}(k_1\mathfrak{Y}_1-k_2\mathfrak{Y}_2)+\mathsf{Z}(k_1\mathfrak{Z}_1-k_2\mathfrak{Z}_2)=0$$

verwandelt[18]).

Wir machen für $\Xi$ den folgenden (wieder vektoriell zu verstehenden) Ansatz, bei dem der besonders angebrachte Nenner sich als zweckmäßig erweisen wird:

$$(85)\qquad \Xi=\frac{1}{\mathsf{N}}[A\mathfrak{X}_1+B\mathfrak{X}_2+C(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2)]$$

und setzen abkürzend

$$(86)\qquad \Sigma\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2=\cos\varphi=\Phi;$$

dabei ist $\varphi$ der variable Winkel des windschiefen Gelenkvierecks $xx_1x^*x_2$ in den beiden sich gegenüberliegenden Ecken $x$ und $x^*$. Formt man (83) mit Hilfe von (85) und (86) um, so gewinnt man unter Berücksichtigung der vektoriellen Natur der Beziehung die

[18]) Macht man die, für das Weitere aber nicht nötige, einschränkende Annahme $k_1c_1-k_2c_2\neq 0$, so erscheint (84) als einfache Folgerung aus (83). Man hat dazu (83) mit $k_1\mathfrak{X}_1-k_2\mathfrak{X}_2$ zu multiplizieren und dann über das Gleichungstripel zu summieren.

folgenden Gleichungen für die Verhältnisse von $A$, $B$, $C$, $\mathsf{N}$:

$$(87)\qquad \begin{cases} (k_1c_1-k_2c_2)(A-k_1\mathsf{N})+(k_2-k_1\Phi)C=0, \\ (k_1c_1-k_2c_2)(B-k_2\mathsf{N})+(k_1-k_2\Phi)C=0, \\ k_2A+k_1B-(k_1c_1-k_2c_2)C\quad=0, \end{cases}$$

während (84) noch eine vierte Gleichung

$$(88)\qquad (k_1-k_2\Phi)A-(k_2-k_1\Phi)B=(k_1^2-k_2^2)\mathsf{N}$$

liefert. Da, wie aus (87) ersichtlich, mit $k_1c_1-k_2c_2\neq 0$ bzw. $=0$ auch $C\neq 0$ bzw. $=0$ wird, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit [s. dazu auch (80)]

$$(89)\qquad C=k_1c_1-k_2c_2=k_1c_1'-k_2c_2'$$

gesetzt werden, zugleich als für das Folgende wichtige Abkürzung für die beiden, einander gleichen Ausdrücke. Wir erhalten dann, und zwar für $C\neq 0$ aus (87), wobei (88) von selber erfüllt ist, für $C=0$ unter Heranziehung von (88), die folgenden Werte für die übrigen durch (85) eingeführten Koeffizienten:

$$(90)\qquad \begin{cases} A=\frac{1}{2k_2}(C^2+k_1^2-k_2^2), \quad B=\frac{1}{2k_1}(C^2+k_2^2-k_1^2), \\ \mathsf{N}=D-\Phi, \quad D=\frac{1}{2k_1k_2}(C^2+k_1^2+k_2^2), \quad \Phi=\Sigma\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \end{cases}$$

($A$, $B$, $C$, $D$ also Konstanten). Damit sind wir [s. (81), (85)] im Besitz des *Formelsystems, durch das die vierte Fläche* ($x^*$) *des Vertauschbarkeitssatzes dargestellt wird:*

$$(91)\qquad x^*=x+\frac{1}{D-\Phi}[A\mathfrak{X}_1+B\mathfrak{X}_2+C(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2)].$$

**6. Fortsetzung der Entwicklungen zum Beweise des Vertauschbarkeitssatzes: Bestätigung der Differentialrelationen.** Man kann sich zunächst mit Hilfe von (90) davon überzeugen, daß die durch (82), (85) bestimmten Vektoren $\dot{\mathfrak{X}}_2$ und $\dot{\mathfrak{X}}_1$ den Relationen $\Sigma\dot{\mathfrak{X}}_2^2=1$, $\Sigma\dot{\mathfrak{X}}_1^2=1$ tatsächlich genügen. Der zweite grundlegende Schritt des Beweises ist die Bestätigung der Differentialrelationen (72). Wir geben diesen im Anschluß an (75) die Form

$$(92)\qquad x_\alpha^*=x_\alpha\{\lambda,\mu,\nu,\varrho\},\quad x_\beta^*=x_\beta\{\lambda',\mu',\nu',\varrho'\},$$

wobei nach (76)

$$(93)\qquad \lambda=\mathfrak{Y}_1\dot{\mathfrak{Z}}_2-\mathfrak{Z}_1\dot{\mathfrak{Y}}_2-c_2\mathfrak{X}_1-c_1\dot{\mathfrak{X}}_2,\ \ldots,\quad \varrho=\Sigma\mathfrak{X}_1\dot{\mathfrak{X}}_2-c_1c_2$$

ist; bei $\lambda',\ldots$ ist $c_1'$, $c_2'$ anstatt $c_1$, $c_2$ zu schreiben. Die erste Formel (92) erhält mittels $x^*=x+\Xi$ die für unseren Zweck geeignete Gestalt

$$(94)\qquad \Xi_\alpha=\frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}[-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)x_\alpha+\lambda(\lambda x_\alpha+\mu y_\alpha+\nu z_\alpha)+\varrho(\mu z_\alpha-\nu y_\alpha)];$$

dabei nehmen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ an der zyklischen Permutation teil.

Für den Vektor $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (Achsenrichtung der resultierenden Drehung) gewinnt man aus (93) mit Benutzung von (82), (85) die Darstellung [$D$ und $\Phi$ wie oben in (90)]:

$$(95)\qquad \lambda=\frac{1}{D-\Phi}[\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1+\mathfrak{B}\mathfrak{X}_2+\mathfrak{C}(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2)],$$

$$(96)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}=c_1(c_2^2+1)-\frac{c_2}{2k_1k_2}[k_1^2(c_1^2+1)+k_2^2(c_2^2+1)], \\ \mathfrak{B}=c_2(c_1^2+1)-\frac{c_1}{2k_1k_2}[k_1^2(c_1^2+1)+k_2^2(c_2^2+1)], \\ \mathfrak{C}=\frac{1}{2k_1k_2}[k_2^2(c_2^2+1)-k_1^2(c_1^2+1)], \quad D=\frac{1}{2k_1k_2}(C^2+k_1^2+k_2^2); \end{cases}$$

dazu kommt die Formel für den vierten Parameter $\varrho$:

$$\varrho = \frac{D^2-1}{D-\Phi} - D - c_1 c_2. \tag{97}$$

Unsere Aufgabe ist es nun also, die Relationen (94) dadurch zu Identitäten zu machen, daß wir die linken Seiten durch Ausführung der Differentiationen aus (85), d. h. aus

$$\Xi = \frac{1}{D-\Phi}\,[A\,\mathfrak{X}_1 + B\,\mathfrak{X}_2 + C(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2)] \tag{98}$$

bilden, während wir rechts die Ausdrücke (95), (97) für $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ eintragen. Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn wir, die vektorielle Natur von (94) berücksichtigend, mit $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2$ multiplizieren und dann jedesmal über das Gleichungstripel summieren. Die dabei *rechts* entstehenden Ausdrücke seien mit $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_{12}$ bezeichnet. Insbesondere ist dann [also rechte Seite von (94) mit $\mathfrak{X}_1$ multipliziert, darüber dann die dreigliedrige Summe]

$$\Omega_1 = \frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}\,\Sigma[-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\,x_\alpha + \lambda(\lambda x_\alpha + \mu y_\alpha + \nu z_\alpha) + \varrho(\mu z_\alpha - \nu y_\alpha)]\,\mathfrak{X}_1,$$

wobei in der Summe $\lambda, \mu, \nu$ mit den Buchstaben $x, y, z$ zyklisch zu permutieren sind. Zunächst wird

$$\Omega_1 = \frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}\,[-\Sigma\lambda^2\,\Sigma\mathfrak{X}_1 x_\alpha + \Sigma\lambda x_\alpha\,\Sigma\lambda\mathfrak{X}_1 - \varrho(\lambda, \mathfrak{X}_1, x_\alpha)]. \tag{99}$$

Wir merken die folgenden aus (95) gewonnenen Hilfsformeln an:

$$\Sigma\lambda\mathfrak{X}_1 = \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\Phi}{D-\Phi}, \quad \Sigma\lambda\mathfrak{X}_2 = \frac{\mathfrak{A}\Phi+\mathfrak{B}}{D-\Phi}, \quad \Sigma\lambda(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2) = \frac{\mathfrak{C}(1-\Phi^2)}{D-\Phi} \tag{100}$$

und führen $S_1$, $S_2$ gemäß (57) ein, dazu als weitere Bezeichnung $S_{12}$:

$$\Sigma\mathfrak{X}_1 x_\alpha = S_1, \quad \Sigma\mathfrak{X}_2 x_\alpha = S_2, \quad \Sigma(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2)\,x_\alpha = (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, x_\alpha) = S_{12}. \tag{101}$$

Ferner wird nach (77)

$$\Sigma\lambda^2 = (c_1^2+1)(c_2^2+1) - \varrho^2, \tag{102}$$

außerdem (die zweite Formel für die Berechnung von $\Omega_2$)

$$\begin{cases} (\lambda, \mathfrak{X}_1, x_\alpha) = \dfrac{1}{D-\Phi}\,[-\mathfrak{B}S_{12} - \mathfrak{C}(S_1\Phi - S_2)], \\ (\lambda, \mathfrak{X}_2, x_\alpha) = \dfrac{1}{D-\Phi}\,[\mathfrak{A}S_{12} + \mathfrak{C}(S_2\Phi - S_1)]. \end{cases} \tag{103}$$

Damit ergibt sich der jetzt an die Stelle von (99) tretende Ausdruck für $\Omega_1$. Wir geben gleichzeitig die auf demselben Wege gefundenen Ausdrücke für $\Omega_2$ und $\Omega_{12}$ an. Als Abkürzung für den Wert (97) werde $\varrho$ noch beibehalten. Die drei Formeln lauten[19]):

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dfrac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}\Big\{-[(c_1^2+1)(c_2^2+1) - \varrho^2]\,S_1 + \dfrac{\varrho}{D-\Phi}\,[\mathfrak{B}S_{12} + \mathfrak{C}(S_1\Phi - S_2)] \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{(D-\Phi)^2}\,(\mathfrak{A}S_1 + \mathfrak{B}S_2 + \mathfrak{C}S_{12})(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\Phi)\Big\} \\ \Omega_2 = \dfrac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}\Big\{-[(c_1^2+1)(c_2^2+1) - \varrho^2]\,S_2 - \dfrac{\varrho}{D-\Phi}\,[\mathfrak{A}S_{12} + \mathfrak{C}(S_2\Phi - S_1)] \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{(D-\Phi)^2}\,(\mathfrak{A}S_1 + \mathfrak{B}S_2 + \mathfrak{C}S_{12})(\mathfrak{A}\Phi + \mathfrak{B})\Big\}, \\ \Omega_{12} = \dfrac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}\Big\{-[(c_1^2+1)(c_2^2+1) - \varrho^2]\,S_{12} \\ \qquad + \dfrac{\varrho}{D-\Phi}\,[-(\mathfrak{A}\Phi + \mathfrak{B})S_1 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\Phi)S_2 + \dfrac{\mathfrak{C}(1-\Phi^2)}{(D-\Phi)^2}\,(\mathfrak{A}S_1 + \mathfrak{B}S_2 + \mathfrak{C}S_{12})]\Big\}. \end{cases} \tag{104}$$

[19]) Nachträgliche Zusammenfassungen innerhalb der einzelnen Ausdrücke würden hier noch weiteren Raum beanspruchen, ohne indessen die nachfolgende Rechnung zu vereinfachen.

Wir wenden uns zum zweiten Teil unserer Aufgabe: in den zu bestätigenden Relationen

$$(105)\qquad \Sigma\Xi_\alpha\mathfrak{X}_1=\Omega_1,\qquad \Sigma\Xi_\alpha\mathfrak{X}_2=\Omega_2,\qquad (\Xi_\alpha,\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)=\Omega_{12}$$

die linkerhand stehenden Ausdrücke zu berechnen. Dazu bedarf es der aus (37), jetzt also

$$\mathfrak{X}_{1\alpha}=a_1(S_1\mathfrak{X}_1-x_\alpha)+b_1(\mathfrak{Y}_1z_\alpha-\mathfrak{Z}_1y_\alpha),\qquad \mathfrak{X}_{2\alpha}=a_2(S_2\mathfrak{X}_2-x_\alpha)+b_2(\mathfrak{Y}_2z_\alpha-\mathfrak{Z}_2y_\alpha)$$

entnommenen Hilfsformeln

$$(106)\qquad \Phi_\alpha=(\Sigma\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2)_\alpha=a_1(S_1\Phi-S_2)+a_2(S_2\Phi-S_1)+(b_2-b_1)S_{12},$$

$$(107)\quad (\mathfrak{X}_{1\alpha},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)=-a_1S_{12}-b_1(S_1\Phi-S_2),\qquad (\mathfrak{X}_{2\alpha},\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)=-a_2S_{12}+b_2(S_2\Phi-S_1).$$

Aus (98) ist $\Xi_\alpha$ zu bilden. An Hand von (106), (107) ergeben sich die folgenden Ausdrücke, denen wir wieder unter Verzicht auf Reduktionen ihre anfängliche Gestalt belassen:

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma\Xi_\alpha\mathfrak{X}_1&=\frac{1}{D-\Phi}\{B[a_2(S_2\Phi-S_1)+b_2S_{12}]+C[a_1S_{12}+b_1(S_1\Phi-S_2)]\}\\
&\quad+\frac{1}{(D-\Phi)^2}[a_1(S_1\Phi-S_2)+a_2(S_2\Phi-S_1)+(b_2-b_1)S_{12}](A+B\Phi),\\
\Sigma\Xi_\alpha\mathfrak{X}_2&=\frac{1}{D-\Phi}\{A[a_1(S_1\Phi-S_2)-b_1S_{12}]+C[a_2S_{12}-b_2(S_2\Phi-S_1)]\}\\
&\quad+\frac{1}{(D-\Phi)^2}[a_1(S_1\Phi-S_2)+a_2(S_2\Phi-S_1)+(b_2-b_1)S_{12}](A\Phi+B),\\
(\Xi_\alpha,\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)&=\frac{1}{D-\Phi}[-(Aa_1+Ba_2)S_{12}-Ab_1(S_1\Phi-S_2)+Bb_2(S_2\Phi-S_1)]\\
&\quad+\frac{C(1-D\Phi)}{(D-\Phi)^2}[a_1(S_1\Phi-S_2)+a_2(S_2\Phi-S_1)+(b_2-b_1)S_{12}].
\end{aligned}\right.$$

Betreffs des nun zu führenden Nachweises, daß die Größen (108) mit den entsprechenden von (104) übereinstimmen, hat man zu beachten, daß alle linear und homogen in $S_1$, $S_2$, $S_{12}$ sind[20]). Setzt man die Koeffizienten einander gleich, so muß eine jede dieser fraglichen Gleichungen zur Identität bezüglich der einzigen noch auftretenden variablen Größe $\Phi$ werden. Insbesondere ergibt sich, wenn wir in $\Sigma\Xi_\alpha\mathfrak{X}_1=\Omega_1$ beiderseits die Faktoren von $S_1$ nehmen und für $\varrho$ seinen Wert (97) eintragen, als erste von drei zu bestätigenden, noch $\Phi$ enthaltenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(-Ba_2+Cb_1\Phi)(D-\Phi)+(a_1\Phi-a_2)(A+B\Phi)\\
&\quad=-2(D-\Phi)^2+\frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}\{[D^2-1-(D+c_1c_2)(D-\Phi)]^2\\
&\qquad\qquad+[D^2-1-(D+c_1c_2)(D-\Phi)]\mathfrak{C}\Phi+\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\Phi)\}.
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Faktoren von $\Phi^2$ und $\Phi$ sowie der von $\Phi$ freien Glieder ergeben sich die drei Relationen

$$\text{(a)}\qquad -Cb_1+Ba_1=-2+\frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}(D+c_1c_2)(D+c_1c_2+\mathfrak{C}),$$

$$\text{(b)}\qquad CDb_1+Aa_1=4D+\frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}-(c_1c_2D+1)(2D+2c_1c_2+\mathfrak{C})],$$

$$\text{(c)}\qquad -(BD+A)a_2=-2D^2+\frac{2}{(c_1^2+1)(c_2^2+1)}[(c_1c_2D+1)^2+\mathfrak{A}^2].$$

---

[20]) Diese Durchsichtigkeit rechtfertigt trotz des erforderlichen Aufwands an Rechnung den eingeschlagenen Weg. Zu bedenken ist nämlich, daß die Heranziehung der zwischen $S_1$, $S_2$, $S_{12}$, $\Phi$ bestehenden Relation (man quadriere die Determinante $S_{12}$)

$$S_{12}^2=1-S_1^2-S_2^2-\Phi^2+2S_1S_2\Phi$$

dabei vermieden wird.

Um diese als erfüllt nachzuweisen, setzt man am besten zunächst

$$a_1 = \frac{2}{k_1(c_1^2+1)}, \quad b_1 = \frac{2c_1}{k_1(c_1^2+1)}, \quad a_2 = \frac{2}{k_2(c_2^2+1)}, \quad C = k_1c_1 - k_2c_2$$

ein und bedient sich (auch in den übrigen Fällen unter anfänglicher Beibehaltung der Größe $D$) mit Vorteil der aus (90) und (96) erhaltenen Hilfsformeln

$$(109) \quad \begin{cases} A = k_1 D - k_2, \quad B = k_2 D - k_1 \\ \mathfrak{A} = c_1 - c_2 D, \quad \mathfrak{B} = c_2 - c_1 D_1 \quad \mathfrak{C} = D + c_1c_2 - \frac{k_1}{k_2}(c_1^2+1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -D - c_1c_2 + \frac{k_2}{k_1}(c_2^2+1). \end{cases}$$

Der Gang der den zweiten Teil des Beweises erledigenden Rechnungen ist hiermit dargelegt: *Jede der Gleichungen* (105) *zerfällt in eine Reihe einzeln zu verifizierender Identitäten in den Konstanten der beiden gegebenen Transformationen* $(\varkappa_1, n_1)$, $(\varkappa_2, n_2)$. Hinsichtlich der entsprechenden Bestätigung für die Ableitungen nach $\beta$ genügt die Bemerkung, daß dabei $a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2'$ [s. (69)] an die Stelle von $a_1, \ldots, a_2, \ldots$ treten; $A, B, C$ [s. (89)], $D$ bleiben, dagegen sind in Verbindung mit $\lambda', \ldots$ [s. (92)] die Konstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ durch die aus (108) mit $c_1|c_1', c_2|c_2'$ zu entnehmenden Werte $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ zu ersetzen.

**7. Abschluß des Beweises: der aus der zweiten Fläche des gegebenen isometrischen Paares hervorgehende Transformationszyklus; die beiden beweglichen Gelenkvierecke als Bianchi-Vierecke.** Man übersieht unmittelbar, daß die Zusammensetzung der simultan auf die zweite Fläche $(\bar{x})$ ausgeübten Transformationen in völlig analoger Weise einen viergliedrigen Zyklus ergibt, in dem die vierte Fläche $(\bar{x}^*)$ wieder Trägerin eines Tschebyschef-Netzes $(\alpha, \beta)$ ist. In den Ausdrücken für die Konstanten wechselt $\varepsilon$ das Vorzeichen, so daß neben (69) jetzt die Formeln

$$(110) \quad \begin{cases} \bar{b}_1 = \frac{h_1}{a_1'} + \varepsilon, \quad \bar{b}_1' = -\frac{h_1}{a_1} - \varepsilon, \quad \bar{c}_1 = \frac{\bar{b}_1}{a_1}, \quad \bar{c}_1' = \frac{\bar{b}_1'}{a_1'}, \\ \bar{k}_1 = \frac{2a_1}{a_1^2 + \bar{b}_1^2} = \frac{2a_1'}{a_1'^2 + \bar{b}_1'^2} = \frac{2a_1a_1'}{a_1 + a_1' + 2\varepsilon h_1} \end{cases}$$

und entsprechende für den Index 2 treten. Nachzuweisen bleibt in erster Linie die *Isometrie der Flächen* $(x^*)$ *und* $(\bar{x}^*)$, d. h. die *Gleichheit der Winkel der beide bedeckenden Tschebyschef-Netze:* $\omega^* = \bar{\omega}^*$.

Wir gehen dazu von der Formel (54) aus:

$$(111) \qquad \cos\omega_1 = \cos\omega - 2(\ln\sigma_1)_{\alpha\beta}$$

und schreiben entsprechend

$$(112) \qquad \cos\omega^* = \cos\omega_1 - 2(\ln\hat{\sigma}_2)_{\alpha\beta},$$

wobei also gemäß (35) und (48)

$$(113) \quad \hat{S}_2 = \Sigma\,\hat{\mathfrak{X}}_2 x_{1\alpha}, \quad \hat{S}_2' = \Sigma\,\hat{\mathfrak{X}}_2 x_{1\beta}, \quad \ln\hat{\sigma}_2 = -\int(a_2\hat{S}_2 d\alpha + a_2'\hat{S}_2' d\beta)$$

gesetzt ist. Wir bilden mit Berücksichtigung von (82)

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{k_2}\Sigma(\Xi - k_1\mathfrak{X}_1)(x_\alpha + k_1\mathfrak{X}_{1\alpha})$$

und erhalten mittels (98), (101) sowie der ersten Relation (107)

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{k_2(D-\Phi)}\{AS_1 + BS_2 + CS_{12} + k_1B[a_1(S_1\Phi - S_2) - b_1S_{12}] \\ - k_1C[a_1S_{12} + b_1(S_1\Phi - S_2)]\} - \frac{k_1}{k_2}S_1,$$

hieraus weiter

$$\hat{S}_2 - S_2 = \frac{1}{D-\Phi}\left[\frac{k_1}{k_2}(1 + Ba_1 - Cb_1)(S_1\Phi - S_2) + S_2\Phi - S_1 + \frac{1}{k_2}(C - k_1Bb_1 - k_1Ca_1)S_{12}\right]$$

und schließlich, da

$$\frac{k_1}{k_2}(1+Ba_1-Cb_1)=\frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{1}{k_2}(C-k_1Bb_1-k_1Ca_1)=\frac{b_2-b_1}{a_2}$$

ist, die für das Folgende geeignete Gestalt des Ausdrucks

$$\dot{S}_2-S_2=\frac{1}{D-\Phi}[a_1(S_1\Phi-S_2)+a_2(S_2\Phi-S_1)+(b_2-b_1)S_{12}]. \tag{114}$$

Das bedeutet aber, wobei wir auf (106) Bezug nehmen und die analoge Formel für die Ableitung nach $\beta$ daneben stellen:

$$a_2(\dot{S}_2-S_2)=\frac{\Phi_\alpha}{D-\Phi}, \quad a_2'(\dot{S}_2'-S_2')=\frac{\Phi_\beta}{D-\Phi},$$

so daß sich

$$\dot{\sigma}_2=\sigma_2(D-\Phi) \tag{115}$$

ergibt[21]). Aus (111), (112) folgt dann die für unseren Zweck benötigte Relation

$$\cos\omega^*-\cos\omega=-2\{\ln[\sigma_1\sigma_2(D-\Phi)]\}_{\alpha\beta}. \tag{116}$$

Beim Übergang zum Zyklus $(\bar{x})$, $(\bar{x}_1)$, $(\bar{x}^*)$, $(\bar{x}_2)$ der simultanen Transformationen bleiben mit $S_1$, $S_1'$, $S_2$, $S_2'$ [s. (35)] auch $\sigma_1$, $\sigma_2$ unverändert, ebenso $\Phi$, da ja [s. (33)]

$$\Sigma\bar{\mathfrak{x}}_1\bar{\mathfrak{x}}_2=\Sigma\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2=\cos\varphi=\Phi \tag{117}$$

ist. Der Nachweis, daß $\cos\bar{\omega}^*=\cos\bar{\omega}$ ist, erfordert also nur noch die Feststellung, daß $D$ von $\varepsilon$ unabhängig ist. Der aus (90) entnommene Ausdruck für $D$ läßt aber die folgende Umformung zu:

$$D=\frac{k_1}{2k_2}(c_1^2+1)+\frac{k_2}{2k_1}(c_2^2+1)-c_1c_2=\frac{a_1^2+a_2^2+(b_2-b_1)^2}{2a_1a_2}.$$

Nach (43) ist $b_2-b_1=\bar{b}_2-\bar{b}_1$, also $\bar{D}=D$. Damit ist auch der letzte Punkt im Beweise des Vertauschbarkeitssatzes erledigt.

Wir beschließen den allgemeinen Teil unserer Untersuchung mit einer Bemerkung über die geometrischen Eigenschaften der räumlichen Gelenkvierecke $x\,x_1x^*x_2$ und $\bar{x}\bar{x}_1\bar{x}^*\bar{x}_2$ mit den Seitenpaaren $k_1$, $k_2$ und $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$. Der Winkel $\psi$ des ersteren in den Eckpunkten $x_1$ und $x_2$ ist bestimmt durch

$$\Psi=\cos\psi=-\Sigma\mathfrak{x}_1\dot{\mathfrak{x}}_2=-\frac{1}{k_2}\Sigma\mathfrak{x}_1(\Xi-k_1\mathfrak{x}_1),$$

woraus sich mit Hilfe von (98)

$$\Psi=\frac{1-D\Phi}{D-\Phi} \tag{118}$$

ergibt. Wegen $\bar{D}=D$ ist dann auch in dem Gelenkviereck $\bar{x}\bar{x}_1\bar{x}^*\bar{x}_2$, das nach (117) bei $\bar{x}$ und $\bar{x}^*$ den Winkel $\varphi$ enthält, $\psi$ der Winkel in dem anderen Paare $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ gegenüberliegender Ecken. Jeweils kongruente Figuren mit $k_1=\bar{k}_1$, $k_2=\bar{k}_2$ bilden die beiden windschiefen Vierecke, wenn $h_1=h_2=0\,(\varkappa_1=\varkappa_2=0)$, d. h. $a_1a_1'=a_2a_2'=1$ ist. Es ist das der Sonderfall, wo die Differenzflächen $\tilde{x}=x-\bar{x}$ usw. durch asymptotische Transformationen verbunden sind, die sich dann ebenfalls zu einem viergliedrigen Zyklus zusammenschließen.

Die *bilineare Kosinusrelation* [s. (118)]

$$\cos\varphi\cos\psi-D(\cos\varphi+\cos\psi)+1=0 \tag{119}$$

charakterisiert die beiden Gelenkvierecke als *Bianchi-Vierecke*, das soll heißen: als dem gleichen Typus angehörig, der von der Zusammensetzung der Bäcklund-Transformationen

[21]) Ebenso wird auch $\dot{\sigma}_1=\sigma_1(D-\Phi)$. Die den Größen $\sigma$ anhaftenden multiplikativen Konstanten sind offensichtlich belanglos, da (116) nur die logarithmischen Ableitungen enthält.

her bekannt ist. Dem Bianchi-Viereck kommt *ein* Freiheitsgrad zu; es besitzt als Folge von (119) die Eigenschaft, daß von seinen vier Ebenen immer zwei benachbarte längs der betreffenden Kante unter konstantem Winkel zusammenstoßen[22]). Charakteristisch für das Bianchi-Viereck ist auch die Darstellung des vierten, zu 0, $k_1\mathfrak{X}_1$, $k_2\mathfrak{X}_2$ gehörigen Eckpunkts $\Xi$ durch die vektorielle Formel (98), in der [s. (90)] neben den Kantenlängen $k_1$, $k_2$ noch $C$ als verfügbare Konstante auftritt.

Der Vertauschbarkeitssatz versagt, wenn gleichzeitig $\varkappa_1 = \varkappa_2$, $n_1 = n_2$ ist. d. h. $a$, $a'$, sgn $h$ für die beiden gegebenen Transformationen übereinstimmen, insofern als er dann, wie aus (90), (91) zu ersehen ist, keine von $(x)$ bzw. $(\bar{x})$ verschiedene vierte Fläche liefert. In dem bereits erwähnten Sonderfalle $C = k_1c_1 - k_2c_2 = 0$ (dabei aber $k_1 \neq k_2$) ist das Gelenkviereck $x\,x_1x^*\,x_2$ eben, es bewegt sich als überschlagenes Viereck, als sogen. Gelenkantiparallelogramm; für das Bianchi-Viereck $\bar{x}\bar{x}_1\bar{x}^*\bar{x}_2$, das mit ihm ständig die Winkel $\varphi$, $\psi$ gemein hat, tritt diese Spezialisierung *nicht* gleichzeitig ein[23]).

**8. Anwendung der Transformation zur Konstruktion eines Bianchischen Flächenpaares aus einer pseudosphärischen Fläche.** Man erkennt unschwer, daß die gefundene Transformation auf das Asymptotenliniennetz einer pseudosphärischen Fläche anwendbar ist. Wie der Prozeß auf ein Flächen*paar* der betrachteten Art führt, wird sich alsbald herausstellen.

Es sei $(x)$ die auf die Asymptotenlinien $(\alpha, \beta)$ bezogene pseudosphärische Fläche, also (mit $\omega \mid 2\theta$)

$$(120) \qquad \Sigma dx^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2, \qquad L = N = 0, \qquad M = \sin 2\theta.$$

Ist $(X^{(1)}, X^{(2)}, X)$ das begleitende rechtwinklige Dreikant[24]) (Hauptkrümmungsrichtungen $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, Normale $X$), so gelten die Differentialrelationen

$$(121) \qquad x_\alpha = \cos\theta\, X^{(1)} - \sin\theta\, X^{(2)}, \qquad x_\beta = \cos\theta\, X^{(1)} + \sin\theta\, X^{(2)},$$

$$(122) \qquad \begin{cases} X^{(1)}_\alpha = -\theta_\alpha X^{(2)} + \sin\theta\, X, & X^{(1)}_\beta = \theta_\beta X^{(2)} + \sin\theta\, X, \\ X^{(2)}_\alpha = \cos\theta\, X + \theta_\alpha X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = -\cos\theta\, X - \theta_\beta X^{(1)}, \\ X_\alpha = -\sin\theta\, X^{(1)} - \cos\theta\, X^{(2)}, & X_\beta = -\sin\theta\, X^{(1)} + \cos\theta\, X^{(2)}. \end{cases}$$

Es ist dann auch übereinstimmend mit (19)

$$(x_\alpha, x_\beta, X) = \sin 2\theta\ ^{25}),$$

so daß wir bei Heranziehung der früheren Formeln $\varepsilon = +1$ zu nehmen haben.

---

[22]) Auf Grund dieser Tatsache läßt sich ein einfacher Mechanismus angeben; siehe, auch bezüglich der unmittelbar folgenden Bemerkung, meine unter [8]) zitierte Abhandlung.

[23]) Durch $\varkappa_1$, $n_1$ und $\varkappa_2$, $n_2$ ausgedrückt, nimmt die Relation $C = 0$ die folgende (von $\varepsilon$ also nicht freie) Form an:

$$\frac{n_1 \sin\varkappa_1 - \varepsilon}{n_1^2 - 1} = \frac{n_2 \sin\varkappa_2 - \varepsilon}{n_2^2 - 1}.$$

[24]) Auf die frühere Verwendung der Zeichen $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ wird weiterhin nicht mehr Bezug genommen, auch über die Buchstaben $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, $\xi$, $u$, $v$ wird neu verfügt; dagegen behalten $\sigma$, $\tau$ in dieser Nr. 8 noch die ihnen im allgemeinen Teil beigelegte Bedeutung.

[25]) Diese Bedingung ist bei den Formeln in § 1 der voraufgegangenen, besonders in betreff der Mittelkongruenz anzuführenden Arbeit nicht erfüllt; siehe *H. Jonas*. Mit einem beliebigen Paare von Flächen gleichen konstanten Krümmungsmaßes verknüpfte räumliche Beziehungen, J. f. d. reine u. angew. Math. 186 (1949), 193. Die dort gefundenen Relationen wären, wenn sie für den gegenwärtigen Zweck übernommen werden sollen, (formal) dahin zu ändern, daß $\theta$ durch $-\theta$, entsprechend bei Anwendung der Bäcklund-Transformation $\theta_1$ durch $-\theta_1$ usw. ersetzt wird. Übrigens wurde a. a. O. die Theorie der Mittelkongruenz im Bäcklund-Zyklus aus einem allgemeineren Prinzip heraus entwickelt, so daß es durchaus angebracht erschien, hier eine kurze direkte Begründung des benötigten Formelapparats zu bringen.

Wir denken uns das System (62) mit $\omega = 2\theta$, $L = N = 0$ geschrieben, verwandeln es aber zweckmäßig in das folgende für die vier gesuchten Funktionen $\sigma$, $\tau$, $\lambda$, $\mu$, wobei die neu hinzutretenden Größen $\lambda$ und $\mu$ als durch die beiden ersten Gleichungen definiert anzusehen sind:

$$(123)\qquad \begin{cases} \sigma_\alpha = a(-\cos\theta\lambda + \sin\theta\mu), & \sigma_\beta = a'(-\cos\theta\lambda - \sin\theta\mu), \\ \tau_\alpha = \frac{h}{a'}(-\sin\theta\lambda - \cos\theta\mu), & \tau_\beta = \frac{h}{a}(-\sin\theta\lambda + \cos\theta\mu), \\ \lambda_\alpha = -\theta_\alpha\mu - a\cos\theta\sigma + \frac{h}{a'}\sin\theta\tau, & \lambda_\beta = \theta_\beta\mu - a'\cos\theta\sigma + \frac{h}{a}\sin\theta\tau, \\ \mu_\alpha = \theta_\alpha\lambda + a\sin\theta\sigma + \frac{h}{a'}\cos\theta\tau, & \mu_\beta = -\theta_\beta\lambda - a'\sin\theta\sigma - \frac{h}{a}\cos\theta\tau; \\ & \lambda^2 + \mu^2 + \tau^2 = \sigma^2. \end{cases}$$

Das transformierte Tschebyschef-Netz [Bezeichnung jetzt $(x')$ zur Unterscheidung von der daneben einzuführenden Bäcklundschen Transformierten $(x_1)$] entnimmt man aus (63):

$$(124)\qquad x' = x + \frac{k_1}{\sigma}(\lambda X^{(1)} + \mu X^{(2)} + \tau X), \qquad k_1 = \frac{2aa'}{a + a' - 2h}.$$

Man erhält nun aber im vorliegenden Falle, da (123) die gleichzeitige Substitution $h|-h$, $\tau|-\tau$ zuläßt, ein zweites, demselben analytischen Prozeß entspringenes Tschebyschef-Netz $(x'')$, das, wie die aus (53) ersichtliche Übereinstimmung der Ausdrücke für $\omega_1$ zeigt, zu $(x')$ isometrisch ist:

$$(125)\qquad x'' = x + \frac{k_2}{\sigma}(\lambda X^{(1)} + \mu X^{(2)} - \tau X), \qquad k_2 = \frac{2aa'}{a + a' + 2h}.$$

Wir haben damit also ein Beispiel eines Flächenpaares, wie es Gegenstand unserer allgemeinen Transformationstheorie war, allerdings mit dem Unterschied, daß die beiden Flächen hier *entgegengesetzt orientiert* erscheinen (d. h. eine von ihnen wäre durch die symmetrische Fläche zu ersetzen), so daß nicht auf der Differenzfläche, sondern auf der *Mittelfläche* $\frac{1}{2}(x' + x'')$ das Kurvennetz $(\alpha, \beta)$ das der Asymptotenlinien ist. Bei der geometrischen Deutung des durch unsere Transformation gewonnenen Ergebnisses (124), (125) handelt es sich hauptsächlich um diese Mittelfläche. Etwas umfangreichere Vorbereitungen sind dazu nötig.

Wir stellen zunächst fest, daß der durch (123) gegebene analytische Prozeß auf die *Zusammensetzung zweier konjugiert-imaginärer Bäcklund-Transformationen* hinausläuft. Setzt man

$$(126)\qquad \sigma = \varrho\cos v, \quad \tau = \varrho\sin v, \quad \lambda = \varrho\cos u, \quad \mu = \varrho\sin u$$

in das System (123) ein, eliminiert dann $\frac{\varrho_\alpha}{\varrho}$ zwischen den Formeln für $\sigma_\alpha$ und $\tau_\alpha$, ebenso zwischen denen für $\lambda_\alpha$ und $\mu_\alpha$ und verfährt entsprechend mit $\frac{\varrho_\beta}{\varrho}$, so findet man, daß es durch das folgende Gleichungspaar im Verein mit dem durch $i|-i$ daraus hervorgehenden ersetzt werden kann:

$$(127)\qquad \begin{aligned} (u + iv)_\alpha - \theta_\alpha &= \left(a - i\frac{h}{a'}\right)\sin(u + iv + \theta), \\ (u + iv)_\beta + \theta_\beta &= \left(a' + i\frac{h}{a}\right)\sin(u + iv - \theta). \end{aligned}$$

Das bedeutet nun in der Tat, da überdies $\left(\text{es ist } h = \sqrt{aa'(1 - aa')}\right)$

$$\left(a - i\frac{h}{a'}\right)\left(a' + i\frac{h}{a}\right) = 1$$

wird, daß die pseudosphärische Fläche $(x)$ zwei Bäcklund-Transformationen $B^{\varkappa_1}$, $B^{\varkappa_2}$ mit konjugiert-imaginären Konstanten unterworfen wird[26]). Dabei ist

$$(128)\qquad \varkappa_1 = a - i\frac{h}{a'}, \qquad \varkappa_2 = a + i\frac{h}{a}.$$

$$(129)\qquad a = \frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2), \qquad a' = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2\varkappa_1\varkappa_2}, \qquad h = i\frac{\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2}{2\varkappa_1\varkappa_2};$$

auch $\theta_1$, $\theta_2$ sind konjugiert-komplex:

$$(130)\qquad u = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \qquad iv = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2).$$

Wir schreiben also (127) in Gestalt der die Operationen $B^{\varkappa_1}$, $B^{\varkappa_2}$ definierenden Differentialrelationen

$$(131)\qquad \begin{cases} \theta_{1_\alpha} - \theta_\alpha = \varkappa_1 \sin(\theta_1 + \theta), & \theta_{1_\beta} + \theta_\beta = \dfrac{1}{\varkappa_1}\sin(\theta_1 - \theta), \\ \theta_{2_\alpha} - \theta_\alpha = \varkappa_2 \sin(\theta_2 + \theta), & \theta_{2_\beta} - \theta_\beta = \dfrac{1}{\varkappa_2}\sin(\theta_2 + \theta). \end{cases}$$

Die transformierten pseudosphärischen Flächen $(x_1)$, $(x_2)$ sind gegeben durch

$$(132)\qquad x_1 = x + \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1^2+1}(\cos\theta_1 X^{(1)} + \sin\theta_1 X^{(2)}), \qquad x_2 = x + \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_2^2+1}(\cos\theta_2 X^{(1)} + \sin\theta_2 X^{(2)}).$$

Für die nun folgenden Entwicklungen seien $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\theta_1$, $\theta_2$ vorläufig als reell vorausgesetzt. Bianchis grundlegendes Theorem über die Komposition der Bäcklund-Transformationen zum viergliedrigen Zyklus, der Vertauschbarkeitssatz, muß herangezogen werden. Der Sachverhalt sei kurz auseinandergesetzt. Man gewinnt für die vierte, den Zyklus schließende pseudosphärische Fläche $(\bar{x})$, die aus $(x_1)$ durch eine $B^{\varkappa_2}$, aus $(x_2)$ durch eine $B^{\varkappa_1}$ hervorgeht, auf Grund der Differentialgleichungen

$$(133)\qquad \begin{cases} \bar{\theta}_\alpha - \theta_{1_\alpha} = \varkappa_2 \sin(\bar{\theta} + \theta_1), & \bar{\theta}_\beta + \theta_{1_\beta} = \dfrac{1}{\varkappa_2}\sin(\bar{\theta} - \theta_1), \\ \bar{\theta}_\alpha - \theta_{2_\alpha} = \varkappa_1 \sin(\bar{\theta} + \theta_2), & \bar{\theta}_\beta + \theta_{2_\beta} = \dfrac{1}{\varkappa_1}\sin(\bar{\theta} - \theta_2) \end{cases}$$

im Verein mit (131) durch Elimination der sämtlichen Ableitungen die Darstellung von $\bar{\theta}$ in endlicher Form

$$(134)\qquad \operatorname{tg}\frac{\bar{\theta} - \theta}{2} = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Diese Fundamentalrelation des Vertauschbarkeitssatzes[27]) hat dann ihrerseits die Differentialgleichungen (133) zur Folge. Die *vierte Fläche* $(\bar{x})$ *des Bäcklund-Zyklus* ist dargestellt durch

$$(135)\qquad \begin{cases} \bar{x} = x + \dfrac{2(\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2)}{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 - 2\varkappa_1\varkappa_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]}\Big[(\varkappa_1 - \varkappa_2)(1 + \varkappa_1\varkappa_2)\cos\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}X' \\ \qquad + (\varkappa_1 + \varkappa_2)(1 - \varkappa_1\varkappa_2)\sin\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}X'' - 2\varkappa_1\varkappa_2\sin(\theta_1 - \theta_2)X\Big], \end{cases}$$

wobei zur Vereinfachung die beiden, zu der ursprünglichen pseudosphärischen Fläche $(x)$ tangentialen Einheitsvektoren $X'$, $X''$:

$$(136)\qquad X' = \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}X^{(1)} + \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}X^{(2)}, \qquad X'' = -\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}X^{(1)} + \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}X^{(2)}$$

eingeführt worden sind; sie halbieren die Winkel der Tangenten $xx_1$, $xx_2$.

---

[26]) Ich schreibe hier $B^\varkappa$ statt mit Bianchi $B_\sigma$; es ist: $\sin\sigma = \dfrac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2 + 1}$, $\cos\sigma = \dfrac{2\varkappa}{\varkappa^2 + 1}$. Es bleibt so auch das Zeichen $\sigma$ für unseren Zweck frei.

[27]) Gleichwertig mit der bilinearen Kosinusrelation des Bianchi-Vierecks $xx_1\bar{x}x_2$.

Gegenstand der weiteren Betrachtung ist die *Mittelkongruenz im viergliedrigen Bäcklund-Zyklus*[28]). Der *Mittelstrahl geht* durch die Mitten der beiden Diagonalen des Bianchi-Vierecks $x x_1 \bar{x} x_2$ und ist deren gemeinschaftliches Lot. Wir brauchen die Formeln für die Brennpunkte $\hat{x}$, $\check{x}$ und für die zugehörigen (im Sinne der Lelieuvreschen Formeln) *normierten* Vektoren der Brennflächennormalen $\hat{\xi}$, $\check{\xi}$:

$$(137)\quad \begin{cases} \hat{x} = x + \dfrac{\varkappa_1+\varkappa_2}{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}\left[\dfrac{\varkappa_1\varkappa_2+1}{\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}} X' + (\varkappa_1-\varkappa_2)\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2} X\right], \\ \check{x} = x - \dfrac{\varkappa_1-\varkappa_2}{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}\left[\dfrac{\varkappa_1\varkappa_2-1}{\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}} X'' + (\varkappa_1+\varkappa_2)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2} X\right]; \end{cases}$$

$$(138)\quad \begin{cases} \hat{\xi} = \dfrac{1}{\sqrt{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}}\left[\dfrac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}} X'' - (\varkappa_1\varkappa_2-1) X\right], \\ \check{\xi} = \dfrac{1}{\sqrt{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}}\left[\dfrac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}} X' - (\varkappa_1\varkappa_2+1) X\right]. \end{cases}$$

Die zur Bestätigung erforderlichen, rechnerisch übrigens nicht ganz bequemen Schritte sollen kurz erörtert werden.

Man überzeugt sich an Hand von (132) und (135) davon, daß die Gerade $\hat{x}\check{x}$ durch die Punkte $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ und $\frac{1}{2}(x+\bar{x})$ geht, also der Mittelstrahl ist. Es empfiehlt sich dann, zunächst nachzuweisen, daß die Vektoren $\hat{\xi}$, $\check{\xi}$ durch die Moutardsche Transformation zusammenhängen. Die Rechnung wird durch abkürzende Bezeichnungen wesentlich vereinfacht. Wir setzen

$$(139)\quad \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\theta\right) = s^*,\ \cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\theta\right) = c^*,\ \sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = s_0,\ \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = c_0,$$

entnehmen aus (131)

$$(140)\quad \frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)_\alpha = \frac{1}{2}(\varkappa_1-\varkappa_2)s^*c_0 + \frac{1}{2}(\varkappa_1+\varkappa_2)c^*s_0$$

und aus (136) in Verbindung mit (122) und (131)

$$(141)\quad \begin{cases} X'_\alpha = PX'' + s^*X, \quad X''_\alpha = -PX' + c^*X, \quad X_\alpha = -s^*X' - c^*X'' \\ \text{mit} \qquad P = \frac{1}{2}(\varkappa_1+\varkappa_2)s^*c_0 + \frac{1}{2}(\varkappa_1-\varkappa_2)c^*s_0. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir im Anschluß an (138), wobei für den Augenblick $\sqrt{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)} = C$ gesetzt sei,

$$(142)\quad \begin{cases} \dfrac{s_0}{c_0}\left(\hat{\xi}\dfrac{c_0}{s_0}\right)_\alpha = \dfrac{1}{2C}\Big\{\left[-(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+2)s^* - (\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)c^*\dfrac{s_0}{c_0}\right]X' \\ \qquad + \left[-(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)s^*\dfrac{c_0}{s_0} - (\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+2)c^*\right]X'' \\ \qquad + \left[(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_1\varkappa_2-1)\dfrac{s^*}{s_0} + (\varkappa_1+\varkappa_2)(\varkappa_1\varkappa_2-1)\dfrac{c^*}{c_0}\right]X\Big\}. \end{cases}$$

Den gleichen Ausdruck mit dem entgegengesetzten Vorzeichen findet man für $\frac{c_0}{s_0}\left(\check{\xi}\frac{s_0}{c_0}\right)_\alpha$. Wir haben so unter Hinzufügung der Formel für die Ableitungen nach $\beta$, jetzt wieder in

[28]) Vgl. §§ 7 bis 9 meiner unter [24]) zitierten Abhandlung.

ausführlicher Schreibweise

$$(143)\qquad \begin{cases} \left(\check{\xi}\operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)_\alpha = -\operatorname{tg}^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(\hat{\xi}\operatorname{ctg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)_\alpha, \\ \left(\check{\xi}\operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)_\beta = \operatorname{tg}^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(\hat{\xi}\operatorname{ctg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)_\beta. \end{cases}$$

Diese Relationen besagen nun aber, daß $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}$ Integrale einer auch von

$$(144)\qquad R = \operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

erfüllten Moutardschen Differentialgleichung $\hat{\xi}_{\alpha\beta} = \mathsf{M}\hat{\xi}$ sind und mittels des durch die transformierende Lösung $R$ definierten Prozesses in die Integrale $\check{\xi}, \check{\eta}, \check{\zeta}$ der von $\frac{1}{R}$ erfüllten Moutardschen Gleichung übergehen. Man überzeugt sich, und zwar durch eine einfache Rechnung, an Hand von (137), (138) davon, daß

$$(145)\qquad \check{x} - \hat{x} = \hat{\eta}\check{\zeta} - \hat{\zeta}\check{\eta}$$

wird und hat anschließend noch zu zeigen, daß $\hat{\xi}, \check{\xi}$ die Normalenrichtungen der Flächen $(\hat{x})$, $(\check{x})$ sind, um dann unmittelbar folgern zu können, daß $(\hat{x})$, $(\check{x})$ die auf die Asymptotenlinien $(\alpha, \beta)$ bezogenen Brennmäntel der Mittelkongruenz bilden, daß die letztere also ein $W$-System ist und daß für $(\hat{x})$ die Lelieuvreschen Formeln in der folgenden Gestalt gelten:

$$(146)\qquad \hat{x}_\alpha = \hat{\eta}\hat{\zeta}_\alpha - \hat{\zeta}\hat{\eta}_\alpha, \qquad \hat{x}_\beta = -(\hat{\eta}\hat{\zeta}_\beta - \hat{\zeta}\hat{\eta}_\beta).$$

Um auch bei diesem letzten Punkt des Beweises die Rechnung möglichst zu beschränken, gehen wir von der aus (137), (138) entnommenen Gleichung

$$\Sigma(\hat{x}-x)\,\hat{\xi}\,\frac{s_0}{c_0} = -\frac{(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)(\varkappa_1\varkappa_2-1)}{[(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)]^{3/2}}$$

aus, differenzieren nach $\alpha$ und erhalten

$$(147)\qquad \sum \hat{x}_\alpha\,\hat{\xi} = \sum x_\alpha\,\hat{\xi} + \frac{s_0}{c_0}\sum\left(\hat{\xi}\,\frac{c_0}{s_0}\right)_\alpha(\hat{x}-x).$$

Nach (122) und (136) wird

$$x_\alpha = c^* X' - s^* X'';$$

außerdem machen wir Gebrauch von der Hilfsformel (142) und zeigen so, daß in (147) die rechte Seite verschwindet, allgemein also, daß $\Sigma\hat{\xi}\,d\hat{x} = 0$ und damit auch $\Sigma\check{\xi}\,d\check{x} = 0$ ist.

Schließlich stellen wir, an die darauf bezügliche Bemerkung in Nr. 1 erinnernd, noch fest, daß die beiden Brennmäntel $(\hat{x})$, $(\check{x})$ der Mittelkongruenz zur *Klasse der Flächen mit vier durch eine quadratische Relation verbundenen Integralen ihrer Moutardschen Differentialgleichung* gehören. Im vorliegenden Falle lautet diese:

$$(148)\qquad \begin{cases} \hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2 - \hat{\vartheta}^2 = 1. & \hat{\vartheta} = \dfrac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\sqrt{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}, \\ \check{\xi}^2 + \check{\eta}^2 + \check{\zeta}^2 - \check{\vartheta}^2 = 1, & \check{\vartheta} = \dfrac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\sqrt{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}. \end{cases}$$

Die vierte Größe $\hat{\vartheta}$ erscheint zugleich in den Differentialgleichungen der zwischen $(\hat{x})$ und $(\check{x})$ vermittelnden Moutardschen Transformation als *transformierende Lösung* $R$ (ein konstanter Faktor bei $R$ ist belanglos). Die Mittelkongruenz ist überdies durch das Bestehen der Relation

$$(149)\qquad \hat{\xi}\check{\xi} + \hat{\eta}\check{\eta} + \hat{\zeta}\check{\zeta} = \frac{\varkappa_1^2\varkappa_2^2-1}{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}$$

als $W$-Kongruenz *mit konstanter mittlerer Schränkung* gekennzeichnet.

Durch Bianchis Veröffentlichungen hinreichend bekannt, auch in den *Lezioni di Geometria differenziale* eingehend behandelt, ist der Sonderfall, wo die Mittelkongruenz ein $W$-Normalensystem ist. In den Brennpunkten $\hat{x}$ und $\check{x}$ treffen sich dann die Normalen der sich im Zyklus gegenüberliegenden pseudosphärischen Flächen, in $\hat{x}$ die von $(x_1)$ und $(x_2)$, in $\check{x}$ die von $(x)$ und $(\bar{x})$; die Brennmäntel sind dann beide Biegungsflächen des verkürzten Katenoids (Typus einer imaginären Rotations-$F^2$). Dieser Sonderfall liegt vor, wenn (nach Bianchi) zwei *entgegengesetzte* Bäcklund-Transformationen $B_\sigma$, $B_{-\sigma}$ zusammengesetzt werden; dem entspricht in unserer Darstellung die Annahme $\varkappa_1 \varkappa_2 = 1$, auf Grund deren die in (149) rechts stehende Konstante Null wird.

Wir kehren nun zu dem Paare der durch (124), (125) bestimmten isometrischen Tschebyschef-Netze zurück. Der in reeller Fassung durch (123) gegebene analytische Prozeß ist, wie wir gesehen haben, identisch mit der Zusammensetzung zweier Bäcklund-Transformationen $B^{\varkappa_1}$, $B^{\varkappa_2}$ für konjugiert-komplexes $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, wobei mit $\theta_1$ und $\theta_2$ die pseudosphärischen Flächen $(x_1)$, $(x_2)$ konjugiert-imaginär werden, während die vierte Fläche $(\bar{x})$ des Zyklus, wie aus (135) zu ersehen ist, reell bleibt. Reell sind nach (137) auch die beiden Brennmäntel $(\hat{x})$, $(\check{x})$ der Mittelkongruenz. Wird nun in (124), (125) vermittelst (129), (130) alles durch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\theta_1$, $\theta_2$ ausgedrückt, so kann man unter Bezugnahme auf (137), (138) die Formeln für das isometrische Flächenpaar $(x')$, $(x'')$ in der folgenden, der gesuchten geometrischen Deutung zugänglichen Gestalt schreiben:

$$(150) \qquad \left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \hat{x} \pm \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\sqrt{(\varkappa_1^2+1)(\varkappa_2^2+1)}} \operatorname{th} v \check{\xi} \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = i \operatorname{th} v\right).$$

Wir ersehen daraus: *Die beiden, die isometrischen Tschebyschef-Netze beschreibenden Punkte $x'$, $x''$ liegen, jeweils symmetrisch zum Brennpunkt $\hat{x}$ des Mittelstrahls, auf der durch diesen gelegten Parallelen zur Normalen des anderen Brennmantels* $(\check{x})$. Damit ordnet sich aber die Konstruktion des Flächenpaares $(x')$, $(x'')$, soweit es sich eben nur um die *Isometrie* handelt, einem geläufigen *allgemeinen Prinzip* unter: Sind $(x)$, $(x_1)$ Brennmäntel eines $W$-Systems und $\xi$, $\xi_1$ die normierten Vektoren der Normalen, ist ferner $R$ die transformierende Lösung der von $\xi$ erfüllten Moutardschen Gleichung, so bilden die von den Punkten $x \pm c R \xi_1$ durchlaufenen Flächen für beliebiges konstantes $c$ ein isometrisches Paar. Anzumerken ist außerdem, wieder mit einem Hinweis auf Nr. 1, daß jetzt, da sich $\hat{\vartheta}$ aus (148) rein imaginär ergibt, also $\hat{\vartheta} \,|\, i\hat{\vartheta}$ zu substituieren ist, für den ausgezeichneten Brennmantel $(\hat{x})$ der Mittelkongruenz die quadratische Relation $\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2 + \hat{\zeta}^2 + \hat{\vartheta}^2 = 1$ lautet. Von $(\check{x})$ gilt offensichtlich *nicht* das gleiche.

Verbinden wir die Punkte $x'$, $x''$ noch mit dem Punkte $\bar{x}$ der (reellen) vierten Fläche des gegenwärtig betrachteten Bäcklund-Zyklus, so haben wir auch hier wieder ein bewegtes Bianchi-Viereck $x x' \bar{x} x''$. In dem *Spezialfalle* $\varkappa_1 \varkappa_2 = 1$, *wo die Mittelkongruenz ein W-Normalensystem ist* und die Brennmäntel $(\hat{x})$, $(\check{x})$ Biegungsflächen vom Typus imaginärer Rotations-$F^2$ werden[29]), kommt noch die bemerkenswerte Eigenschaft hinzu, daß *die vier Seiten dieses Bianchi-Vierecks Normalenkongruenzen durchlaufen.* Das entnimmt man, da $\varkappa_1 \varkappa_2 = 1$ nach (129) $a = a'$ bedeutet, aus dem Schluß von Nr. 4.

Wird in unserer, auf die pseudosphärische Fläche $(x)$ ausgeübten, durch (123) bis (125) definierten Transformation $h = 0$, damit also $\varkappa_1 = \varkappa_2$ $(= \varkappa$, also *reell*) angenommen, so kann $\tau = 0$ oder $\tau = 1$ (gleichbedeutend mit $\tau = \text{const}$) sein. Für $\tau = 0$ erhält man einfach die

[29]) Diesem Falle entspricht das gegen Schluß der Nr. 1 und dort in der Fußnote [9]) genannte, von *Bianchi* selber herrührende Beispiel. Erwähnt sei noch, daß die Abwickelbarkeit auf den einfachen transzendenten Rotationsflächentypus, das hyperbolische Sinusoid nicht dem ausgezeichneten, sondern dem anderen Brennmantel $(\check{x})$ zukommt, in dessen Punkten sich die Normalen der beiden *reellen* pseudosphärischen Flächen $(x)$, $(x')$ treffen.

Bäcklund-Transformation $B^{\varkappa}$ selber. Für $\tau = 1$ ergibt sich das isometrische Paar Tschebyschefscher Netze

$$(151)\qquad \left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = x + \frac{2\varkappa}{(\varkappa^2+1)\operatorname{ch} v}\left(\cos u\, X^{(1)} + \sin u\, X^{(2)} \pm \operatorname{sh} v\, X\right)$$

auf Grund eines Lösungspaars $u$, $v$ der Differentialgleichungen (127), jetzt

$$(152)\qquad \begin{cases} u_\alpha - \theta_\alpha = \varkappa \sin(u+\theta)\operatorname{ch} v, & u_\beta + \theta_\beta = \dfrac{1}{\varkappa}\sin(u-\theta)\operatorname{ch} v, \\ v_\alpha = \varkappa\cos(u+\theta)\operatorname{sh} v, & v_\beta = \dfrac{1}{\varkappa}\cos(u-\theta)\operatorname{sh} v \end{cases}$$

und äquivalent mit denjenigen einer einzelnen Bäcklund-Transformation $B^{\varkappa}$ für reelles $\varkappa$ und eine komplexe Lösung $u + iv$[30]). Die Mittelfläche $\hat{x} = \frac{1}{2}(x' + x'')$ mit dem Asymptotenliniennetz $(\alpha, \beta)$ ist hier zweiter Brennmantel einer zur pseudosphärischen Fläche $(x)$ tangentialen $W$-Kongruenz von konstanter mittlerer Schränkung. In der Tat entnimmt man aus (137), (138) für $\varkappa_1 = \varkappa_2 (= \varkappa)$

$$\check{x} = x, \qquad \check{\xi} = -X, \qquad \Sigma\, \hat{\xi}\check{\xi} = \frac{\varkappa^2-1}{\varkappa^2+1}.$$

Spezialisiert man weiter und setzt $\varkappa = 1$, so liegen zwei konjugiert-imaginäre Komplementärtransformationen vor. Die Fläche $(\hat{x})$ wird als zweiter Brennmantel eines $(x)$ berührenden $W$-Normalensystems Biegungsfläche einer Rotationsfläche, und zwar die zum elliptischen Typus des pseudosphärischen Linienelements gehörige Ergänzungsfläche. Mit dieser verbindet sich also, entsprechend den Formeln

$$(153)\qquad \left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \hat{x} \pm \operatorname{th} v\, X, \qquad \hat{x} = x + \frac{1}{\operatorname{ch} v}\left(\cos u\, X^{(1)} + \sin u\, X^{(2)}\right)$$

ein isometrisches Flächenpaar der betrachteten Art.

**9. Bewegtes Bianchi-Viereck, dessen gegenüberliegende Ecken paarweise isometrische Tschebyschef-Netze beschreiben.** Das Ergebnis der vorigen Nr. 8 legt es nahe, auch noch den Fall zu untersuchen, wo in den *beiden* quadratischen Relationen (148) das letzte Glied positives Vorzeichen hat. Das entspricht, wie man leicht übersieht, einem viergliedrigen Bäcklund-Zyklus, in dem gegenüberliegende Flächen, $(x)$ und $(\bar{x})$ einerseits, $(x_1)$ und $(x_2)$ andererseits, konjugiert-imaginär sind. Ein besonderer Gewinn ist übrigens infolge des Fehlens einer reellen Ausgangsfläche aus der Zusammensetzung der Bäcklund-Transformationen nicht zu ziehen[31]).

---

[30]) Eine komplexe Lösung $u + iv$ der totalen Riccatischen Differentialgleichung der $B^{\varkappa}$ erhält man natürlich an Hand einer als bekannt vorausgesetzten reellen $\theta_1$, indem man in der noch zwei Quadraturen erfordernden allgemeinen Lösung $\Theta_1$ die darin enthaltene willkürliche Konstante $c$ komplex wählt. Ist

$$\theta_{1_\alpha} - \theta_\alpha = \varkappa \sin(\theta_1 + \theta), \qquad \theta_{1_\beta} - \theta_\beta = \frac{1}{\varkappa}\sin(\theta_1 - \theta),$$

so hat man

$$\ln R = -\int\left[\varkappa\cos(\theta_1+\theta)\,d\alpha + \frac{1}{\varkappa}\cos(\theta_1-\theta)\,d\beta\right], \qquad U = \int\frac{1}{R}\left[\varkappa\sin(\theta_1+\theta)\,d\alpha + \frac{1}{\varkappa}\sin(\theta_1-\theta)\,d\beta\right]$$

und für das allgemeine Integral $\Theta_1$ die Formel $\operatorname{ctg}\dfrac{\Theta_1 - \theta_1}{2} = R(U + c)$.

[31]) Zu nennen ist in diesem Zusammenhang noch eine Abhandlung von *L. Bianchi*, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde, Soc. Ital. delle Sc. (detta dei XL) (3) 14 (1905). Die Zusammensetzung $B_\sigma B_{-\sigma}$ (unser Spezialfall $\varkappa_1\varkappa_2 = 1$) mit Einschluß der imaginären Fälle dient dort zur Bestimmung der Biegungsflächen vom Typus reeller und imaginärer Rotations-$F^2$. Auf einen eigenartigen Umstand sei hier noch aufmerksam gemacht, den auch wir berücksichtigen müßten, wenn wir uns auf die Formeln von Nr. 8, insbesondere auf (131), (133), (134) stützen wollten. Sollen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ebenso $\theta_1$, $\theta_2$ konjugiert-komplex sein, so kann die gleiche Bedingung nicht noch von $\theta$, $\bar{\theta}$ erfüllt werden, wohl aber von $\theta$ und $\bar{\theta} - \pi$.

Es handelt sich also um die Bestimmung einer *W-Kongruenz mit konstanter mittlerer Schränkung*, die außerdem den alsbald zu formulierenden *Bedingungen hinsichtlich der quadratischen Relationen* genügen soll. Die beiden Brennmäntel[32]) seien $(x)$, $(x_1)$, die zugehörigen normierten Normalenvektoren $\xi, \xi_1$, die transformierende Lösung der von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ erfüllten Moutardschen Gleichung sei $R$, so daß die Relationen

$$(154)\qquad \xi_{1_\alpha}+\xi_\alpha=-\frac{R_\alpha}{R}(\xi_1-\xi),\qquad \xi_{1_\beta}-\xi_\beta=-\frac{R_\beta}{R}(\xi_1+\xi),\qquad \Sigma\xi\xi_1=a,$$

$$(155)\qquad x=\int[(\eta\zeta_\alpha-\zeta\eta_\alpha)d\alpha-(\eta\zeta_\beta-\zeta\eta_\beta)d\beta],\qquad x_1=x+\eta\zeta_1-\zeta\eta_1$$

gelten sollen. Wird mit Benutzung der meist üblichen Bezeichnung

$$(156)\qquad \Sigma\xi^2=\varrho\qquad \Sigma\xi_1^2=\varrho_1$$

gesetzt, so sind $K=-\frac{1}{\varrho^2}$ und $K_1=-\frac{1}{\varrho_1^2}$ die Krümmungsmaße von $(x)$ und $(x_1)$. Dabei werden infolge von $\Sigma\xi\xi_1=a$ wie im Falle der $W$-Normalensysteme $\varrho$ und $\varrho_1$ Funktionen eines Parameters $\psi$, d. h. einer gewissen Funktion von $\alpha$, $\beta$, die weiterhin noch zweckmäßig definiert werden soll. Von $\psi$ hängt dann auch $R$ ab, entsprechend der aus (154), (156) gewonnenen Formel

$$(157)\qquad \frac{dR}{R}=\frac{d\varrho+d\varrho_1}{2(\varrho-\varrho_1)}.$$

Im vorliegenden Falle wird nun verlangt, daß

$$(158)\quad \Sigma\xi^2=\varrho=1-\vartheta^2,\qquad \Sigma\xi_1^2=\varrho_1=1-\vartheta_1^2,\qquad \vartheta_1=\frac{c}{\vartheta},\qquad R=\vartheta\qquad (c=\text{const.})$$

ist; das bedeutet: *Die beiden Brennmäntel $(x)$ und $(x_1)$ der W-Kongruenz sollen der Klasse der Flächen mit vier durch die quadratische Relation $\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\vartheta^2=1$ verbundenen Lösungen ihrer Moutardschen Differentialgleichung angehören, und die vierte Lösung $\vartheta$ soll die transformierende Funktion sein, die das System $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\vartheta$ in $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, $\vartheta_1$ überführt*, wobei dann aus (154) in der Tat $\vartheta\vartheta_1=\text{const.}$ folgt; $R=\vartheta$ steht dabei auch mit (157) im Einklang. Wie in Nr. **1** [s. (12)] wählen wir $\alpha$, $\beta$ so, daß

$$(159)\qquad \Sigma(\xi_\alpha)^2=1-(\vartheta_\alpha)^2,\qquad \Sigma(\xi_\beta)^2=1-(\vartheta_\beta)^2$$

wird, und bestätigen mit Hilfe von (154), (158), daß genau dieselben Beziehungen auch für den Brennmantel $(x_1)$ gelten.

Es möge einstweilen angenommen werden, daß eine $W$-Kongruenz mit den geforderten Eigenschaften bereits vorliegt. Wir sind damit in der Lage, den hier in geometrischer Hinsicht besonders interessierenden Teil des Ergebnisses vorwegzunehmen. Der zu beweisende Satz sagt folgendes aus:

*Legt man in der betrachteten W-Kongruenz durch jeden der beiden Brennpunkte $x$, $x_1$ des Strahls die Parallele zur Normalen des anderen Brennmantels, so lassen sich auf diesen beiden Geraden, symmetrisch in bezug auf $x$ bzw. $x_1$ gelegen, je zwei Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}$ und $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$ so bestimmen, daß sie paarweise isometrische, den Asymptotenlinien der Brennmäntel entsprechende Tschebyschef-Netze beschreiben; überdies bilden die vier Punkte ein räumliches Gelenkviereck $x^{(1)}\,x_1^{(1)}\,x^{(2)}\,x_1^{(2)}$ mit paarweise gleichen Gegenseiten, das durch das Bestehen der Winkelrelation als Bianchi-Viereck gekennzeichnet ist.*

Die beiden Punktepaare sind dargestellt durch

$$(160)\qquad x^{(1,2)}=x\pm\vartheta\xi_1,\qquad x_1^{(1,2)}=x_1\pm\vartheta_1\xi=x+\eta\zeta_1-\zeta\eta_1\pm\frac{c}{\vartheta}\xi.$$

[32]) Wir verfügen in diesem Schlußteil, für den die Formeln unserer allgemeinen Transformationstheorie nicht mehr herangezogen werden, über die Buchstaben ohne Rücksicht auf deren frühere Bedeutung; insbesondere erscheinen im folgenden $\sigma$ und $\tau$ in neuer Verwendung.

Die Reduktion der Linienelemente auf die Tschebyschefsche Form und der Nachweis der Isometrie für $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$ bzw. $(x_1^{(1)})$, $(x_1^{(2)})$ ergibt sich auf Grund von (158), (159) unter Heranziehung der Differentialrelationen (154) (darin also $R=\vartheta$); für $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$ insbesondere hat man zunächst

$$x_\alpha^{(1,2)} = \eta\zeta_\alpha - \zeta\eta_a \pm (\xi\vartheta_\alpha - \vartheta\xi_\alpha), \qquad x_\beta^{(1,2)} = -(\eta\zeta_\beta - \zeta\eta_\beta) \mp (\xi\vartheta_\beta - \vartheta\xi_\beta),$$

das Weitere im Anschluß an (4) von Nr. **1**, wobei wieder auf die *entgegengesetzte Orientierung* innerhalb der Paare hingewiesen sei. Die Abstände $x^{(1)}x_1^{(1)} = x^{(2)}x_1^{(2)} = k$, $x^{(1)}x_1^{(2)} = x^{(2)}x_1^{(1)} = k'$ erweisen sich mittels einer einfachen Rechnung als konstant; es wird

$$k^2 = 1-(c+a)^2, \qquad k'^2 = 1-(c-a)^2; \tag{161}$$

danach ist übrigens $|c|+|a|<1$ vorauszusetzen[33]). Bezeichnet man die veränderlichen Kantenwinkel des Gelenkvierecks $x^{(1)}\,x_1^{(1)}\,x^{(2)}\,x_1^{(2)}$ in den Ecken $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ mit $\Omega$, in $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$ mit $\Omega_1$, so findet man

$$\cos\Omega = \frac{1}{kk'}\left(1+c^2-a^2-\frac{2c}{\vartheta^2}\right), \quad \cos\Omega_1 = \frac{1}{kk'}(1+c^2-a^2-2\vartheta^2)$$

und hieraus in der Tat die bilineare Kosinusrelation

$$\cos\Omega\cos\Omega_1 - \frac{1+c^2-a^2}{kk'}(\cos\Omega+\cos\Omega_1)+1=0. \tag{162}$$

Die jetzt als Nachtrag zu behandelnde *Darstellung der vorausgesetzten W-Kongruenz* erledigt sich von der *sphärischen Abbildung* aus. Es empfiehlt sich, das Problem allgemeiner anzugreifen und zunächst die *durch eine Relation zwischen $\varrho$, $\varrho_1$ und die Konstante $a$ definierten W-Kongruenzen mit konstanter mittlerer Schränkung* zu bestimmen[34]). Wir führen den Einheitsvektor $X$ der Strahlrichtung und das auf die asymptotischen Parameter $\alpha$, $\beta$ der Brennmäntel bezogene Linienelement der Bildkugel $(X)$ ein:

$$X = \frac{\eta\zeta_1-\zeta\eta_1}{\sqrt{\varrho\varrho_1-a^2}}, \qquad \Sigma dX^2 = e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2, \tag{163}$$

zugleich mit Hinweis auf (154) die wichtigen Hilfsgrößen

$$\sigma = \Sigma\,\xi_\alpha X = -\Sigma\,\xi_{1\alpha}X, \qquad \tau = \Sigma\,\xi_\beta X = \Sigma\,\xi_{1\beta}X. \tag{164}$$

Durch Differentiation mit Berücksichtigung der Moutardschen Gleichung folgt:

$$\sigma_\beta = \Sigma\,\xi_\alpha X_\beta, \qquad \tau_\alpha = \Sigma\,\xi_\beta X_\alpha. \tag{165}$$

Andrerseits entnimmt man aus (154) im Verein mit $\Sigma\,\xi X = \Sigma\,\xi_1 X = 0$

$$\Sigma(\xi_1+\xi)X_\alpha = 0, \qquad \Sigma(\xi_1-\xi)X_\beta = 0;$$

differenziert man die erste Gleichung nach $\beta$, die zweite nach $\alpha$ und setzt

$$X_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} X_\alpha + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} X_\beta - fX$$

ein, so wird

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\tau_\alpha}{\tau} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \tag{166}$$

Dieser Zusammenhang der Hilfsgrößen $\sigma$, $\tau$ mit dem sphärischen Linienelement ist von grundlegender Bedeutung. Werden $X_\alpha$, $X_\beta$ durch die gleichfalls zur Bildkugel $(X)$ tangen-

[33]) $\vartheta^2$ ist auf ein leicht anzugebendes Teilintervall zwischen $c^2$ und 1 beschränkt.

[34]) Ich beziehe mich zum Teil auf Ergebnisse, die sich in meiner Dissertation finden; siehe *H. Jonas*, Über *W*-Strahlensysteme, Flächendeformation und äquidistante Kurvenscharen, Diss. Halle 1908.

tialen Vektoren $\xi$, $\xi_1$ der Brennflächennormalen ausgedrückt, so ergibt sich

$$(167)\qquad X_\alpha = \frac{\sigma}{\varrho\varrho_1 - a^2}\left[-(\varrho_1 + a)\xi + (\varrho + a)\xi_1\right], \qquad X_\beta = \frac{\tau}{\varrho\varrho_1 - a^2}\left[-(\varrho_1 - a)\xi - (\varrho - a)\xi_1\right]$$

und daraus die charakteristische Gestalt für das Linienelement von $(X)$:

$$(168)\qquad e = \frac{\varrho + \varrho_1 - 2a}{\varrho\varrho_1 - a^2}\sigma^2, \qquad f = -\frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho\varrho_1 - a^2}\sigma\tau, \qquad g = \frac{\varrho + \varrho_1 + 2a}{\varrho\varrho_1 - a^2}\tau^2.$$

Dieses fällt damit unter den noch etwas allgemeineren Typus, für den

$$(169)\qquad e = A\sigma^2, \qquad f = B\sigma\tau, \qquad g = C\tau^2$$

ist, wobei $A$, $B$, $C$ Funktionen eines Parameters $\psi(\alpha, \beta)$ vorstellen. Ihre Ableitungen nach $\psi$ seien durch den Strich $'$ angedeutet. Die Formeln (166) gehen jetzt über in

$$(170)\qquad \sigma_\beta = \frac{C'}{2B}\psi_\alpha\tau, \qquad \tau_\alpha = \frac{A'}{2B}\psi_\beta\sigma.$$

Die noch erforderliche, mit Berücksichtigung dieser Relationen zu bildende Gaußsche Differentialgleichung für die zunächst also durch (169) definierte Einheitskugel vereinfacht sich, wie der Gang der Rechnung zeigt, erheblich, wenn

$$(171)\qquad \psi = \int \frac{d\sqrt{AC - B^2}}{2B}$$

gewählt wird. Es ergibt sich so die im Verein mit (170) von $\psi$, $\sigma$, $\tau$ zu erfüllende Differentialgleichung

$$(172)\qquad 2\psi_{\alpha\beta} + \sqrt{AC^2 - B^2}\,\sigma\tau = 0.$$

Kehren wir zur Bildkugel unseres $W$-Systems zurück, also zu den durch (168) gegebenen Ausdrücken für $A$, $B$, $C$[35]), so finden wir

$$(173)\qquad \sqrt{AC - B^2} = \frac{2}{\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}};$$

an die Stelle von (171) tritt

$$(174)\qquad \psi = \int \frac{d\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}}{\varrho - \varrho_1},$$

und (172) schreibt sich jetzt

$$(175)\qquad \sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}\,\psi_{\alpha\beta} + \sigma\tau = 0.$$

Um auf Grund der durch die Funktionen $\psi$, $\sigma$, $\tau$ bestimmten Bildkugel $(X)$ den Brennmantel $(x)$ des $W$-Systems darzustellen, bedienen wir uns für $x_\alpha$ des Ansatzes

$$x_\alpha = \eta\zeta_\alpha - \zeta\eta_\alpha = \mathfrak{l}\xi + \mathfrak{m}\xi_1 + \mathfrak{n}X,$$

multiplizieren zwecks Ermittlung der Koeffizienten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ mit $\xi$ bzw. mit $\xi_1$ und $X$ [s. (163)] und summieren jedesmal über die drei Gleichungen. Zur Vereinfachung des für $\mathfrak{n}$ erhaltenen Ausdrucks

$$\mathfrak{n} = \frac{\varrho\sum\xi_\alpha\xi_1 - \frac{a}{2}\varrho_\alpha}{\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}}$$

hat man (154), (157) und die Definition (174) von $\psi$ heranzuziehen. Es wird so unter Hinzufügung der Formel für $x_\beta$ und mit dem Bemerken, daß $\xi$, $\xi_1$ sich mittels (167) durch

[35]) Für $A, B, C$ wäre die Spezialisierung durch die Relation $\frac{C-A}{AC-B^2} = a$ gegeben.

$X_\alpha$, $X_\beta$ ausdrücken lassen:

$$(176)\qquad \begin{cases} x_\alpha = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}}(a\xi - \varrho\xi_1) - (\varrho - a)\psi_\alpha X, \\ x_\beta = -\dfrac{\tau}{\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}}(a\xi - \varrho\xi_1) - (\varrho + a)\psi_\beta X \end{cases}$$ [36]).

Es bleibt uns noch, die Behandlung unseres Spezialfalles zu Ende zu führen. Wie in (158) soll also wieder

$$(177)\qquad \varrho = 1 - \vartheta^2, \qquad \varrho_1 = 1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}, \quad R = \vartheta$$

sein. Man hat demnach

$$(178)\qquad \sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2} = \frac{1}{\vartheta}\sqrt{(1 + c^2 - a^2)\vartheta^2 - \vartheta^4 - c^2}$$

und für $\psi$ als Funktion von $\vartheta$ das elliptische Integral 1. Gattung

$$(179)\qquad \psi = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{(1 + c^2 - a^2)\vartheta^2 - \vartheta^4 - c^2}}.$$

Als etwas Besonderes treten die Beziehungen (159)

$$\Sigma(\xi_\alpha)^2 = 1 - (\vartheta_\alpha)^2, \qquad \Sigma(\xi_\beta)^2 = 1 - (\vartheta_\beta)^2$$

hinzu. Quadriert man [s. (163), (164)]

$$\sigma = \frac{(\xi_\alpha, \xi, \xi_1)}{\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}}, \qquad \tau = \frac{(\xi_\beta, \xi, \xi_1)}{\sqrt{\varrho\varrho_1 - a^2}}$$

nach der Determinantenregel und bedient sich zur Reduktion insbesondere noch der aus (154) zu entnehmenden Hilfsformeln

$$\Sigma\,\xi_1\xi_\alpha = -(1 - a)\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta}, \qquad \Sigma\,\xi_1\xi_\beta = (1 + a)\frac{\vartheta_\beta}{\vartheta},$$

so erscheinen die noch geforderten Beziehungen in der folgenden Gestalt:

$$(180)\qquad \sigma^2 = 1 - [(1 - a)^2 - c^2](\psi_\alpha)^2, \qquad \tau^2 = 1 - [(1 + a)^2 - c^2](\psi_\beta)^2,$$

wobei an $|c| + |a| < 1$ erinnert sei. Diese Gleichungen stehen aber mit den für $\psi$, $\sigma$, $\tau$ geltenden Differentialgleichungen (170), (175) im Einklang, wie man bestätigt, indem man die erste nach $\beta$ und die zweite nach $\alpha$ differenziert. Sie sind Ergebnisse einer ersten Integration, bei der dann in (181) rechts an Stelle von 1 zunächst $f_1(\alpha)$ bzw. $f_2(\beta)$ stehen würde. Damit ist aber die Darstellung unserer $W$-Kongruenz, soweit es sich um die Bestimmung der intrinseken Elemente (Fundamentalgrößen) handelt, auf die folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\psi(\alpha, \beta)$ allein zurück-

[36]) Liegt ein $W$-Normalensystem ($a = 0$) vor, so werden

$$du = R\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho}}(\sigma d\alpha + \tau d\beta), \qquad dv = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_1}}(\sigma d\alpha - \tau d\beta)$$

exakte Differentiale; das aus (176) berechnete Linienelement von $(x)$ hat dann Rotationsflächentypus

$$\Sigma\,dx^2 = \varrho^2 d\psi^2 + R^2\varrho_1 dv^2,$$

und das der Bildkugel nimmt die für den Fall der Weingartenschen Flächen charakteristische Gestalt an ($u$, $v$ Parameter der Krümmungslinien, $g_0$ Funktion von $e_0$):

$$\Sigma\,dX^2 = \frac{1}{R^2\varrho_1}du^2 + \frac{R^2}{\varrho}dv^2.$$

geführt [$\psi$ und $\vartheta$ hängen durch (179) zusammen]:

$$(181)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\vartheta}\sqrt{(1+c^2-a^2)\,\vartheta^2-\vartheta^4-c^2}\;\psi_{\alpha\beta} \\ &\quad+\sqrt{1-[(1-a)^2-c^2]\,(\psi_\alpha)^2}\;\sqrt{1-[(1+a)^2-c^2]\,(\psi_\beta)^2}=0\ ^{37)}. \end{aligned}$$

---

[37]) Differentialgleichungen dieses Typus, hervorgegangen aus der Zusammensetzung entgegengesetzter Bäcklund-Transformationen $B_\sigma B_{-\sigma}$ finden sich bereits bei *Bianchi*; siehe das Zitat unter [31]). Es bedarf kaum des Hinweises, daß die von uns entwickelte Methode natürlich auch auf die Mittelkongruenz des reellen Bäcklund-Zyklus angewendet werden kann. Die Reduktion auf eine einzige Differentialgleichung des Typus (181) ist übrigens im Bereiche der $W$-Kongruenzen von konstanter mittlerer Schränkung nicht verallgemeinerungsfähig, sie gilt nur für den Fall einer symmetrischen bilinearen Relation zwischen $\varrho$ und $\varrho_1$; siehe meine Dissertation unter [34]).

Angemerkt sei hier noch in aller Kürze eine Tatsache, deren Ursprung die simultan auf die vier (in unserem Falle imaginären) pseudosphärischen Flächen des Bäcklund-Zyklus ausgeübte *Liesche Transformation* ist. Für $a=0$, d. i. im Fall des $W$-Normalensystems, werde $c_0$, $\vartheta_0$, $\psi_0$ und auch das Variablenpaar in der Form $\alpha_0, \beta_0$ geschrieben. Es ist dann [s. oben im Text (179), (181)]

$$\psi_0=\int\frac{d\vartheta_0}{\sqrt{(1-\vartheta_0^2)\,(\vartheta_0^2-c_0^2)}},\qquad \frac{1}{\vartheta_0}\sqrt{(1-\vartheta_0^2)\,(\vartheta_0^2-c_0^2)}\;\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\alpha_0\partial\beta_0}+\sqrt{1-(1-c_0^2)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\alpha_0}\right)^2}\sqrt{1-(1-c_0^2)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta_0}\right)^2}=0,$$

so daß man, wie beiläufig erwähnt sei, mit $\varkappa=\sqrt{1-c_0^2}$ als Modul und $\varkappa'=c_0$ auch

$$\vartheta_0=\frac{\varkappa'}{\mathrm{dn}\,\psi_0},\qquad \frac{\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,\psi_0\,\mathrm{cn}\,\psi_0}{\mathrm{dn}\,\psi_0}\,\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\alpha_0\partial\beta_0}+\sqrt{1-\varkappa^2\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\alpha_0}\right)^2}\sqrt{1-\varkappa^2\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta_0}\right)^2}=0$$

schreiben kann. Setzt man jetzt, wobei $\gamma$ eine willkürliche Konstante $(0<\gamma<1)$ bedeutet,

$$c=\gamma c_0,\ a=\sqrt{(1-\gamma^2)\,(1-\gamma^2 c_0^2)},\qquad \vartheta=\gamma\vartheta_0,\ \psi=\frac{1}{\gamma}\,\psi_0$$

und führt an Stelle der Variablen $\alpha_0, \beta_0$ neue $\alpha, \beta$ ein, die sich von ihnen durch zueinander reziproke konstante Faktoren unterscheiden:

$$\alpha=\nu\alpha_0,\qquad \beta=\frac{1}{\nu}\,\beta_0,\qquad \nu=\frac{\sqrt{1-\gamma^2c_0^2}-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1-c_0^2}},$$

so geht die im Sonderfalle des Normalensystems geltende partielle Differentialgleichung für $\psi_0$ in die dem allgemeinen Falle entsprechende Differentialgleichung (181) für $\psi$ über.

---

Eingegangen 15. August 1950.

# Über eine Konvergenzfrage bei der Auflösung linearer Differentialgleichungen in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit.

Von *Gerhard Lyra* in Göttingen.

---

**1.** Das Hinreichen der Bedingung im Fuchsschen Satz, wonach eine lineare homogene Differentialgleichung in der Normalform

$$z^2 w'' + P(z) z w' + Q(z) w = 0 \tag{1}$$

mit eindeutigen Koeffizienten dann und nur dann ein Fundamentalsystem mit einer Stelle der Bestimmtheit in $z = 0$ besitzt, wenn $P(z)$ und $Q(z)$ im Punkte $z = 0$ und einer Umgebung desselben eindeutig und regulär sind, hatte ursprünglich Fuchs dadurch bewiesen, daß er durch Substitution des Lösungsansatzes $w = z^\gamma (1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)$ die formal der Differentialgleichung genügenden Reihen bestimmte und dann die Konvergenz derselben bewies. Für diesen Teil des Fuchsschen Satzes teilte Schlesinger im 132. Bande dieses Journals einen direkten aber weniger einfachen Beweis mit, welchen Birkhoff[1]) 1910 durch einen neuen, überaus kurzen, gleichfalls direkten Beweis ersetzt hat. Damit war die ursprüngliche, auf dem Potenzreihenansatz beruhende Methode für viele Untersuchungen entbehrlich und nur noch für die Berechnung der Integrale erforderlich. Aber darüber hinaus nahmen seitdem verschiedene Autoren, namentlich Schlesinger und Birkhoff, als selbstverständlich an, daß diese durch Substitution in die Differentialgleichung berechneten Reihenentwicklungen in jedem Fall konvergent sind, so daß es keines besonderen Konvergenzbeweises bedarf.

Jedoch kann in dem Falle, daß sich eine formal der Differentialgleichung genügende Reihe $z^\gamma (1 + c_1 z + \cdots)$ nicht eindeutig nach der Methode des Koeffizientenvergleichs bestimmt, nicht ohne weiteres auf die Konvergenz dieser Reihe geschlossen werden, weil nicht immer zwei linear unabhängige Integrale dieser Form zu existieren brauchen. Es wäre ja denkbar, daß trotz Vorhandenseins eines logarithmischen Fundamentalsystems der Potenzreihenansatz zu keiner eindeutigen Koeffizientenbestimmung und doch zu einer eindeutig bestimmten Lösung führt, indem nur eine der beiden resultierenden Reihen konvergent ausfällt. Z. B. lassen sich lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung angeben, welche genau eine in $z = 0$ reguläre Lösung der Form

---

[1]) *G. D. Birkhoff*, A simplified treatment of the regular singular point, Transactions Am. Math. Soc. **11** (1910), 199.

$1+c_1z+c_2z^2+\cdots$ besitzen, bei welchen aber die Substitution des Potenzreihenansatzes zwei verschiedene Potenzreihen ergeben, so daß genau eine für alle $z \neq 0$ divergent ist.

Daß es trotz des Birkhoffschen Beweises für das Hinreichen der Fuchsschen Bedingung noch eines Konvergenzbeweises für die formalen Lösungen bedarf, hat zuerst Bieberbach[2]) in der 1. Auflage seines Lehrbuchs der Differentialgleichungen hingewiesen, und dort bemerkt, daß es wünschenswert wäre, durch eine rein begriffliche Überlegung den Konvergenzbeweis einzusparen.

In der vorliegenden Note soll in Abschnitt **3** die Schwierigkeit, welche der Durchführung einer rein begrifflichen Überlegung entgegenstand, durch einen sehr einfachen Hilfssatz behoben werden und in Abschnitt **4** ein neuer Konvergenzbeweis mitgeteilt werden, welcher wesentlich kürzer ist als die bisher bekannten Beweise. Zuvor möge in Abschnitt **2** zur besseren Formulierung der Konvergenzfrage der Begriff des normierten Fundamentalsystems eingeführt werden.

**2.** Die Differentialgleichung (1), worin $P(z)$ und $Q(z)$ im Punkte $z=0$ und einer Umgebung desselben eindeutig und regulär sind, besitzt in der Umgebung von $z=0$ bekanntlich stets ein Fundamentalsystem der Form

$$w_1 = z^\alpha \sum_0^\infty a_\nu z^\nu \qquad (a_0 = 1),$$

$$w_2 = z^\beta \left[ \sum_{-m}^\infty b_\nu z^\nu + C \log z \cdot \sum_0^\infty a_\nu z^\nu \right],$$

worin $C=0$ falls $\alpha \neq \beta$ und $m$ beliebig ganzzahlig ist, oder — was nach Ersetzung von $\beta$ durch $\beta+m$ und $b_\nu$ durch $b_{\nu+m}$ auf dasselbe hinauskommt — von der Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} w_1 &= z^\alpha \sum_0^\infty a_\nu z^\nu && (a_0 = 1), \\ w_2 &= z^\beta \sum_0^\infty b_\nu z^\nu + C \log z \cdot z^\alpha \sum_0^\infty a_\nu z^\nu && (b_0 = 1), \end{aligned}$$

worin im Falle $C \neq 0$ die Differenz $\alpha - \beta$ ganzzahlig ist. Man kann auch stets erreichen, daß $\Re(\alpha) \geq \Re(\beta)$ ist, indem man nötigenfalls $w_1$ und $w_2$ vertauscht oder $w_2$ durch $w_1 + w_2$ ersetzt, je nachdem $C=0$ oder $\neq 0$ ist. Dann sind offenbar $\alpha$ und $a_1, a_2, \ldots$ durch die Differentialgleichung eindeutig bestimmt. Damit auch $C$, $\beta$ und $b_1, b_2, \ldots$ eindeutig bestimmt sind, normieren wir die Form des Fundamentalssystems noch durch weitere Bedingungen. In der Tat kann das Fundamentalsystem (2) mit $\Re(\alpha) \geq \Re(\beta)$ stets auf eine und nur eine der folgenden Formen gebracht werden:

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} w_1 &= z^\alpha \sum_0^\infty a_\nu z^\nu \quad (a_0 = 1), \\ w_2 &= z^\beta \sum_0^\infty b_\nu z^\nu \quad (b_0 = 1), \end{aligned}$$

wo entweder $\alpha - \beta$ nicht ganzzahlig und $\Re(\alpha-\beta) \geq 0$ (Fall $\mathrm{A}_1$) oder $\alpha - \beta = N$ eine natürliche Zahl und $b_N = 0$ ist (Fall $\mathrm{A}_2$);

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{aligned} w_1 &= z^\alpha \sum_0^\infty a_\nu z^\nu \quad (a_0 = 1), \\ w_2 &= z^\beta \sum_0^\infty b_\nu z^\nu + C \log z \cdot z^\alpha \sum_0^\infty a_\nu z^\nu \quad (b_0 = 1,\ C \neq 0), \end{aligned}$$

wo entweder $\alpha = \beta$ und $C=1$ (Fall $\mathrm{B}_1$), oder $\alpha - \beta = N$ eine natürliche Zahl und $b_N = 0$ ist (Fall $\mathrm{B}_2$).

---

[2]) *L. Bieberbach*, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, 1. Aufl. 1923, S. 178 bzw. 3. Aufl. S. 216, Fußnote 1.

Denn ist $C=0$, so ist $\alpha-\beta$ entweder nicht ganzzahlig (Fall $A_1$) oder eine natürliche Zahl oder $=0$, wobei der letztere Fall auf den vorletzten reduziert werden kann, indem $w_1$ durch $(w_1-w_2)/(a_N-b_N)$ ersetzt wird, wenn $a_\nu-b_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$ zum erstenmal für $\nu=N$ von Null verschieden ist. Ist also $\alpha-\beta$ eine natürliche Zahl $N$, so ersetze man $w_2$ durch $w_2-b_N w_1$, um auf den Fall $(A_2)$ zu kommen. Ist aber $C\neq 0$, also notwendig $\alpha-\beta$ eine ganze Zahl $N\geq 0$, so ersetze man $w_2$ im Falle $N=0$ durch $\frac{1}{C}w_2+\left(1-\frac{1}{C}\right)w_1$ (Fall $B_1$) und im Falle $N>0$ durch $w_2-b_N w_1$ (Fall $B_2$). Offenbar kann ein Fundamentalsystem auch auf nur eine der vier genannten Formen gebracht werden. Sämtliche in dieser einen Form vorkommenden Konstanten sind eindeutig bestimmt, wie sich nach der üblichen Methode des Koeffizientenvergleichs ergibt, aber auch leicht direkt beweisen läßt. Wir nennen ein Fundamentalsystem normiert, wenn es von einer der vier genannten Formen ist, so daß die Differentialgleichung (1) mit eindeutigen und regulären $P(z)$ und $Q(z)$ in einer Umgebung von $z=0$ ein und nur ein normiertes Fundamentalsystem besitzt.

Der Ansatz $w=z^\gamma\sum_0^\infty c_\nu z^\nu\,(c_1=1)$ führt zu folgender Fallunterscheidung, welcher formal die vier normierten Fundamentalsysteme entsprechen. Ist nämlich $P(z)=\sum_0^\infty p_\nu z^\nu$ und $Q(z)=\sum_0^\infty q_\nu z^\nu$ in der Umgebung von $z=0$, so ergibt die Substitution des Ansatzes die bekannte Identität

$$0=z^2w''+P(z)zw'+Q(z)w=z^\gamma\sum_0^\infty[c_0f_\nu(\gamma)+c_1f_{\nu-1}(\gamma+1)+\cdots+c_\nu f_0(\gamma+\nu)]z^\nu$$

mit $f_\nu(\gamma)=p_\nu\gamma+q_\nu$ oder $=\gamma(\gamma-1)+p_0\gamma+q_0$, je nachdem $\nu>0$ oder $=0$ ist. Das Verschwinden der Koeffizienten führt in bekannter Weise, zunächst für $\nu=0$, zur Bestimmung von $\gamma$ aus

$$(3)\qquad c_0f_0(\gamma)=\gamma^2+(p_0-1)\gamma+q_0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=0\quad\text{mit}\quad\Re(\alpha)\geq\Re(\beta)$$

und hierauf für $\nu\geq 1$ zur Bestimmung von $c_\nu$ aus

$$(4)\qquad\begin{aligned}
&f_0(\gamma+1)c_1 &&=-f_1(\gamma)\\
&f_1(\gamma+1)c_1+f_0(\gamma+2)c_2 &&=-f_2(\gamma)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&\cdots\cdots\\
&f_{\nu-2}(\gamma+1)c_1+f_{\nu-3}(\gamma+2)c_2+\cdots+f_0(\gamma+\nu-1)c_{\nu-1} &&=-f_{\nu-1}(\gamma)\\
&f_{\nu-1}(\gamma+1)c_1+f_{\nu-2}(\gamma+2)c_2+\cdots+f_1(\gamma+\nu-1)c_{\nu-1}+f_0(\gamma+\nu)c_\nu &&=-f(\gamma)
\end{aligned}$$

Wählt man $\gamma=\alpha$, so sind alle $f_0(\gamma+1), f_0(\gamma+2),\ldots$ von Null verschieden und also $c_\nu=a_\nu$ für alle $\nu\geq 1$ eindeutig bestimmt, so daß in jedem Fall $z^\alpha(1+a_1z+a_2z^2+\cdots)$ formal der Differentialgleichung genügt.

Falls nun die Differenz $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig ist, so sind für $\gamma=\beta$ wieder alle $f_0(\gamma+1), f_0(\gamma+2),\ldots$ von Null verschieden und also $c_\nu=b_\nu$ für alle $\nu\geq 1$ eindeutig bestimmt, so daß auch $z^\beta(1+b_1z+b_2z^2+\cdots)$ formal der Differentialgleichung genügt (Fall $A'_1$). Andernfalls ist $\alpha-\beta$ eine ganze Zahl $N\geq 0$. Sei zunächst $N>0$. Dann ist wegen $f_0(\beta+N)=f_0(\alpha)=0$ eine Lösung $c_\nu=b_\nu$ des Systems (4) für $\nu\geq N$ entweder nicht eindeutig oder überhaupt nicht vorhanden, je nachdem die $N$-te Gleichung

$$f_{N-1}(\beta+1)b_1+f_{N-2}(\beta+2)b_2+\cdots+f_1(\beta+N-1)b_{N-1}+0\cdot b_N=-f_N(\beta)$$

erfüllt ist oder einen Widerspruch enthält (dabei sind $b_1,\ldots,b_{N-1}$ für $N>1$ durch die $N-1$ voraufgehenden Gleichungen eindeutig bestimmt). Ist das erstere der Fall $(A'_2)$,

ist also die $N$-te Gleichung nur ein Multiplum der $(N-1)$-ten Gleichung (wenn $N>1$, sonst $f_1(\beta)=0$), dann sind nach willkürlicher Festsetzung von $b_N$ — etwa $b_N=0$ — alle weiteren Koeffizienten $b_{N+1}, b_{N+2}, \ldots$ eindeutig bestimmt, so daß sich auch in diesem Fall eine und nur eine formale Lösung $z^\beta(1+b_1z+\cdots)$ mit $b_N=0$ ergibt.

Ist das letztere der Fall $(B'_2)$, d. h. sind die Gleichungen (4) nicht miteinander verträglich, so ist damit die oben erhaltene Reihe $z^\alpha(1+a_1z+\cdots)$ eindeutig bestimmt und also gewiß konvergent, da eine Lösung dieser Form in jedem Fall existiert. Dasselbe trifft im Falle $N=0$, d. h. $\alpha=\beta$ zu (Fall $B'_1$). In beiden Fällen findet man durch Reduktion der Differentialgleichung als zweites linear unabhängiges Integral eine und nur eine Entwicklung der Form $(B_2)$ bzw. $(B_1)$, welche notwendig konvergent ist.

**3.** Aber auch in den Fällen $(A'_1)$ und $(A'_2)$ sind die formal der Differentialgleichung genügenden Reihen $z^\alpha(1+a_1z+\cdots)$ und $z^\beta(1+b_1z+\cdots)$ beide konvergent. Andernfalls würde nur eine der Reihen konvergieren, also notwendig ein logarithmisches Fundamentalsystem von Lösungen existieren, was aber nicht sein kann. Denn es gilt der

**Satz.** *Besitzt die Differentialgleichung* (1) *in der Umgebung von* $z=0$ *ein logarithmisches Fundamentalsystem* $B_1$ *oder* $B_2$, *so führt der Ansatz* $w=z^\gamma(1+c_1z+\cdots)$ *auf eine eindeutige Bestimmung der Konstanten* $\gamma$ *und* $c_1, c_2, \ldots$, *d. h. auf einen der Fälle* $B'_1$ *oder* $B'_2$.

**Beweis.** Besitzt die Differentialgleichung eine Lösung der Form (B), so ist $\alpha$ eine Wurzel der Fundamentalgleichung (3) und das System (4) ist mit $\gamma=\alpha$ und $c_\nu=a_\nu$ erfüllt. Mit Rücksicht darauf ergibt sich durch Substitution der Lösung $w_2$ in die Differentialgleichung die Identität

$$0=z^2w''+P(z)zw'+Q(z)w=z^\beta\sum_0^\infty[b_0f_\nu(\beta)+b_1f_{\nu-1}(\beta+1)+\cdots+b_\nu f_0(\beta+\nu)+B_{\nu-N}]z^\nu$$

mit

$$B_\nu=C[a_0p_\nu+a_1p_{\nu-1}+\cdots+a_\nu p_0+a_\nu(2\nu-1+2\alpha)]$$

(insbesondere $B_\nu=0$ für $\nu<0$). Aus dem Verschwinden des Koeffizienten von $z^\nu$ folgt zunächst für $\nu=0$, daß $\beta=\alpha-N$ im Falle $N>0$ wegen $f_0(\beta)=0$ die zweite Wurzel der Fundamentalgleichung (3) ist, und daß $\alpha$ im Falle $N=0$ wegen $f_0(\beta)+C(p_0-1+2\alpha)=0$ und $\alpha=\beta$, also $p_0=1-2\alpha$, eine Doppelwurzel der Fundamentalgleichung ist. Aber für diese zweite Wurzel $\gamma=\beta$ sind im Falle $\beta\neq\alpha$, d. h. $N>0$ die Bestimmungsgleichungen (4) miteinander unverträglich. Denn aus dem Verschwinden des Koeffizienten von $z^N$ folgt wegen $B_0=C(p_0-1+2\alpha)=CN\neq 0$, daß

$$b_1f_{N-1}(\beta+1)+\cdots+b_Nf_0(\beta+N)=-f_N(\beta)-CN,$$

also $\neq -f_N(\beta)$, so daß die $N$-te der Gleichungen (4) wegen $f_0(\beta+N)=f_0(\alpha)=0$ sicher nicht erfüllt ist, w. z. b. w.

**4.** Kürzer als diese von Abschätzungen freie Überlegung ist der nachfolgende direkte Beweis für die Konvergenz jeder formalen Lösung $w=z^\beta(1+b_1z+b_2z^2+\cdots)$ der Differentialgleichung (1). Es gilt nämlich die folgende Abschätzung:

Genügt $\gamma=\beta$ und $c_\nu=b_\nu$ mit $\nu\geq 1$ den Bestimmungsgleichungen (3) und (4), so wähle man zunächst $\delta>0$ so klein, daß

$$|f_0(\beta+n)|=|(\beta+n)^2+(p_0-1)(\beta+n)+q_0|=\left|1+\frac{2\beta+p_0-1}{n}\right|n^2\geq\delta n^2$$

ist für alle natürlichen Zahlen $n$ — ausgenommen $n = N$, falls $\beta + N$ auch Wurzel der Fundamentalgleichung (3) ist. Sodann wähle man $\varrho > 0$ so klein, daß

$$|p_1|\varrho + |p_2|\varrho^2 + \cdots \text{ und } |q_1|\varrho + |q_2|\varrho^2 + \cdots \text{ beide } < \frac{\delta}{1+|\beta|}$$

sind, dann ist $\varrho^\nu |b_\nu| \leq 1$ für alle $\nu \geq 0$, also $\sum_0^\infty b_\nu z^\nu$ in $|z| < \varrho$ konvergent.

**Beweis.** Die Behauptung $\varrho^\nu |b_\nu| \leq 1$ ist wegen $b_0 = 1$ für $\nu = 0$ richtig und sei für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ mit $n \geq 1$ bereits bewiesen. Dann folgt aus der letzten[3]) der Gleichungen (4) wegen der Induktionsvoraussetzung und der getroffenen Wahl von $\delta$ und $\varrho$:

$$\begin{aligned}
\varrho^n |b_n| &\leq [\varrho^{n-1} |b_{n-1}| \cdot \varrho^1 |f_1(\beta + n - 1)| + \cdots + \varrho^0 |b_0| \cdot \varrho^n |f_n(\beta)|] / |f_0(\beta + n)| \\
&\leq [\varrho |p_1(\beta + n - 1) + q_1| + \cdots + \varrho^n |p_n \beta + q_n|] / |f_0(\beta + n)| \\
&\leq [\varrho |q_1| + \cdots + \varrho^n |q_n| + (|\beta| + n - 1)(\varrho |p_1| + \cdots + \varrho^n |p_n|)] / |f_0(\beta + n)| \\
&\leq \frac{\delta}{1+|\beta|} \frac{n+|\beta|}{\delta n^2} \leq 1, \text{ w. z. b. w.}
\end{aligned}$$

[3]) Im Falle $\nu = N$ und $f_0(\beta + N) = 0$ ist die $\nu$-te Gleichung des Systems (4) auf Grund der vorausgesetzten Verträglichkeit mit $b_N = 0$ äquivalent, so daß auch in diesem Fall $\varrho^n |b_n| \leq 1$ ist.

Eingegangen 13. Oktober 1950.

# Über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen.

Von *Hans-Joachim Kanold* in Gießen.

Im folgenden soll mit elementaren Mitteln ein spezieller Satz über zwei diophantische Gleichungen bewiesen werden, der es gestattet, frühere Ergebnisse[1]) über ungerade vollkommene Zahlen zu verallgemeinern und zu verschärfen. Hierauf wird in einer anschließenden Arbeit eingegangen werden. Der Satz lautet:

(1) **Satz.** *Es seien $p$, $p_i$ beliebige Primzahlen und $a_i$, $b_i$ beliebige positive ganze Zahlen* $(i=1,2)$. *Dann besitzt das System der beiden Gleichungen*

$$(*) \qquad \sum_{\nu=0}^{p-1} p_i^{\nu a_i} = p\, p_j^{b_j};\ i, j = 1, 2;\ i \neq j, \textit{ nur die Lösung } 1+3^2 = 2\cdot 5;\ 1+5 = 2\cdot 3.$$

**Beweis.** a) Zunächst können wir zeigen, daß jedes $a_i$ eine Potenz von $p$ sein muß. Hätte nämlich ein $a_i$ einen von $p$ verschiedenen Primteiler $q$, so wären in der linken Seite von $(*)$ außer dem Kreisteilungspolynom $F_{pa_i}(p_i)$ noch das Kreisteilungspolynom $F_{\frac{pa_i}{q}}(p_i)$ und somit außer $p$ noch mindestens zwei verschiedene Primteiler enthalten, im Gegensatz zur rechten Seite[2]). Wir können somit setzen

$$(2) \qquad a_i = p^{\alpha_i}; \qquad i = 1, 2; \qquad \alpha_i \text{ nichtnegativ, ganz.}$$

Aus $p_i^{p^{\alpha_i+1}} \equiv 1 \pmod{p_j^{b_j}}$ und $p\, p_i^{b_i} \equiv 1 \pmod{p_j^{p^{\alpha_j}}}$ ergibt sich

$$(3) \qquad p^{p^{\alpha_i+1}} \equiv 1 \pmod{p_j^{m_j}};\ m_j = \operatorname{Min}\{b_j;\ p^{\alpha_j}\}.$$

Ferner folgt[3]) aus $(*)$ und (2)

$$(4) \qquad p_i \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_j+1}}, \text{ d. h. } p_i > p^{\alpha_j+1}.$$

b) Nunmehr unterscheiden wir die beiden Fälle für $m_j$. Ist zunächst

$$(5) \qquad m_j = b_j,$$

[1]) Es handelt sich insbesondere um *H. J. Kanold*, Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl, Journ. f. reine u. angew. Math. **186** (1944), 25—29.

[2]) Für $p>3$ folgt dies wegen $p\, a_i, \frac{p\, a_i}{q} > 3, \neq 6$ z. B. aus *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I., Journ. f. reine u. angew. Math. **187** (1950), 169—182, Abschnitt I, (29) und (35). Ebenso folgt aus den früheren Ergebnissen die Behauptung für $p=3$ und $p_i>2$. Den Fall $p=3$, $p_i=2$ können wir hier weglassen, weil dann $1+p_j^{a_j}+p_j^{2a_j} = 3\cdot 2^{b_i}$ einen Widerspruch liefert. Aus $1+p_i^{a_i} = 2\, p_j^{b_j}$ sehen wir, daß $p_i>2$ sein muß, wenn $p=2$ ist. Ist endlich $p=2=\frac{p a_i}{q}$, so folgt die Behauptung aus der Unmöglichkeit von

$$1+p_i^q = (1+p_i)(1-p_i+p_i^2-\cdots+p_i^{q-1}) = 2\, p_j^{b_j}.$$

[3]) Vgl. a. a. O.[2]).

so führt dies zu

$$(6) \qquad p^{(\alpha_j+1)(p-1)p^{\alpha_i}} < p_i^{(p-1)p^{\alpha_i}} < p p_j^{b_j} < p\, p^{p^{\alpha_i+1}}.$$

Daraus folgt

$$(7) \qquad (\alpha_j+1)(p-1) \leq p.$$

Für $\alpha_j > 1$ ergibt sich aus (7) der Widerspruch $p \leq \frac{3}{2}$.

Für $\alpha_j = 1$ folgt $p = 2$; $m_j = b_j \leq 2$; $a_j = 2$. Die Gleichungen (*) nehmen dann die folgende Gestalt an:

$$(8) \qquad 1 + p_i^{a_i} = 2 p_j^{b_j}; \quad 1 + p_j^2 = 2 p_i^{b_i}.$$

Aus $(1 + p_i^{a_i})^2 = 4(2 p_i^{b_i} - 1)^{b_j}$ ergibt sich, daß $p_i = 3$ oder 5 und mindestens eine der beiden Zahlen $a_i$, $b_i$ gleich 1 sein müssen. Dies führt auf die unter (1) angegebene Lösung.

Für $\alpha_j = 0$, d. h. $a_j = b_j = 1$, folgt aus (*) und (4)

$$(9) \qquad 1 + p_i^{p^{\alpha_i}} + \cdots + p_i^{(p-1)p^{\alpha_i}} = p\, p_j > 1 + p^{p^{\alpha_i}} + \cdots + p^{(p-1)p^{\alpha_i}}.$$

Andererseits erhalten wir aus (3)

$$(10) \qquad p_j \mid (p^{p^{\alpha_i}} - 1)\ (1 + p^{p^{\alpha_i}} + \cdots + p^{(p-1)p^{\alpha_i}}).$$

Wäre der Ausdruck in der letzten Klammer gleich $f p_j$ und $f > 1$, so wäre er wegen $f \equiv 1 \pmod p$ größer als $p p_j$ im Widerspruch zu (9). Wäre

$$(11) \qquad 1 + p^{p^{\alpha_i}} + \cdots + p^{(p-1)p^{\alpha_i}} = p_j,$$

so könnten wir die Gleichung (11) von der Gleichung (9) subtrahieren. Die linke Seite enthielte dann den Faktor $p_i^{p^{\alpha_i}} - p^{p^{\alpha_i}}$, der nach (4) kongruent 1 (mod $p$) ist, die rechte Seite würde gebildet von dem Ausdruck $p_j(p-1)$. Daraus ergibt sich [4])

$$(12) \qquad p_j < p_i^{p^{\alpha_i}}.$$

Diese Ungleichung gilt nun natürlich auch, falls aus (10) folgen würde, daß $p_j$ ein Teiler von $p^{p^{\alpha_i}} - 1$ wäre. Wenn $p > 2$ gilt, so liefern (9) und (12) zusammen einen Widerspruch. Für $p = 2$ nehmen jetzt die Gleichungen (*) die Gestalt

$$(13) \qquad 1 + p_i^{a_i} = 2 p_j; \quad 1 + p_j = 2 p_i^{b_i}$$

an. Aus $(1 + p_i^{a_i}) = 2(2 p_i^{b_i} - 1)$ folgt, daß $p_i = 3$ und mindestens eine der Zahlen $a_i$, $b_i$ gleich 1 sein müssen. Daraus ergibt sich wieder die unter (1) angegebene Lösung.

c) Wir müssen zum Schluß noch den Fall

$$(14) \qquad m_j = p^{\alpha_j} < b_j; \quad m_i = p^{\alpha_i} < b_i$$

untersuchen. Nach (3) und (4) folgt $p^{\alpha_j} < p^{\alpha_i+1}$, also $\alpha_j \leq \alpha_i$ und ebenso $\alpha_i \leq \alpha_j$, so daß wir von nun an setzen können:

$$(15) \qquad \alpha_i = \alpha_j = \alpha.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $p_i < p_j$ annehmen. Dann folgt aus (*) und (4), daß

$$p\, p_i^{(p-1)p^{\alpha}-1} < p_i^{(p-1)p^{\alpha}} < p_j^{(p-1)p^{\alpha}} < p\, p_i^{b_i},$$

somit also

$$(16) \qquad (p-1)\, p^{\alpha} \leq b_i$$

gilt. Wir nehmen zunächst $b_i \leq p^{\alpha+1}$, d. h. $b_i = (p-1)\, p^{\alpha} + r$ mit $0 \leq r \leq p^{\alpha}$ an. Dann folgt aus (*), daß $p \equiv p_i^{p^{\alpha}-r} \pmod{p_j^{p^{\alpha}}}$ ist. Diese Kongruenz stellt einen Widerspruch dar, weil beide Seiten zwischen 0 und $p_j^{p^{\alpha}}$ liegen, also gleich sein müßten. Somit bleibt

[4]) Der Fall $p_i^{p^{\alpha_i}} - p^{p^{\alpha_i}} = 1$ zieht nach sich $\alpha_i = 0$; $p = 2$; $p_i = 3$; $1 + 3 = 2 p_j$. Dann folgt ein Widerspruch aus $1 + p_j = 2 p_i^{b_i}$.

noch der Fall $b_i > p^{\alpha+1}$ zu untersuchen. Wir setzen also

$$(17) \qquad b_i = B\,p^{\alpha+1} + R \text{ mit } 0 \leq R < p^{\alpha+1}.$$

Aus (*) und (15) ergibt sich

$$(18) \qquad p\,p_i^{b_i} \equiv p\,p_i^R \equiv 1 + p_j^{p^\alpha} + p_j^{2p^\alpha} + \cdots \pmod{p_j^{b_j}}.$$

Weil $p_j^{b_j} < p_i^{(p-1)p^\alpha} < p_j^{(p-1)p^\alpha}$, gilt $b_j < (p-1)\,p^\alpha$. Wegen (14) gibt es eine ganze Zahl $z$ so, daß

$$(19) \qquad 0 < z < p-1;\; z\,p^\alpha < b_j \leq (z+1)\,p^\alpha$$

erfüllt ist. Für die rechte Seite der Kongruenz (18) folgt daraus

$$(20) \qquad 1 + p_j^{p^\alpha} + \cdots + p_j^{zp^\alpha} < (z+1)\,p_j^{zp^\alpha} < p_j^{b_j}.$$

Nach (*) ist $p_i^{(p-1)p^\alpha} < p\,p_j^{b_j}$, also auch

$$(21) \qquad p\,p_i^{(p-1)p^\alpha - 2} < p_j^{b_j}.$$

Die rechte Seite von (18) ist nach (20) kleiner als $p_j^{b_j}$, andererseits ist sie wegen $p_j \equiv 1 \pmod{p}$ kongruent $z+1$, d. h. inkongruent $0 \pmod{p}$. Daraus folgt $p\,p_i^R > p_j^{b_j}$, also nach (21), daß

$$R \geq p^{\alpha+1} - (p^\alpha + 1)$$

gilt. Wir setzen

$$(22) \qquad r' = p^{\alpha+1} - R \leq p^\alpha + 1.$$

Dann ist $b_i = (B+1)\,p^{\alpha+1} - r'$ und nach (*)

$$(23) \qquad p \equiv p_i^{r'} \pmod{p_j^{p^\alpha}};\; p_i^{r'} > p_j^{p^\alpha} > p_i^{p^\alpha}, \text{ somit } r' > p^\alpha.$$

Es bleibt nach (22) nur die Möglichkeit

$$(24) \qquad r' = p^\alpha + 1;\; R = p^{\alpha+1} - p^\alpha - 1$$

übrig. Die Ungleichungen $p\,p_i^{(p-1)p^\alpha - 1} > p_j^{b_j}$ und $p^{(p-1)p^\alpha} < p\,p_j^{b_j}$ führen zu $p_i < p^2$. Nach (4), (15) und (24) ergibt sich

$$(25) \qquad \alpha = 0;\; r' = 2;\; R = p-2.$$

Nach (19) ist $z < b_j \leq z+1$, also $z = b_j - 1$. Nach (18) und (20) folgt

$$p\,p_i^{p-2} \equiv 1 + p_j + p_j^2 + \cdots + p_j^{b_j-1} \equiv \frac{p_j^{b_j}-1}{p_j-1} \pmod{p_j^{b_j}}.$$

Das führt zu

$$(26) \qquad p(p_j-1)\,p_i^{p-2} \equiv -1 \pmod{p_j^{b_j}}.$$

Mit Hilfe von (*) und (25) sehen wir, daß

$$(27) \qquad p(p_j-1)\,p_i^p + p_i^2 \equiv p(p_j-1) + p_i^2 \equiv 0 \pmod{p_j^{b_j}}$$

gilt. Da $p(p_j-1) + p_i^2 < p_j^2 + p_j^2 < p_j^3$, ist wegen $2 \leq z+1 = b_j$ genau $b_j = 2$. Die Relation $p(p_j-1) + p_i^2 = p_j^2$ führt schließlich zu

$$(28) \qquad p(p_j-1) = (p_j - p_i)\,(p_j + p_i).$$

Diese Gleichung stellt einen Widerspruch dar, weil $p_i \equiv p_j \equiv 1 \pmod{p}$, also $p \mid p_j - p_i$ ist. Hiermit ist der Beweis von Satz (1) beendet.

Eingegangen 16. Oktober 1950.

# Beweis der Konvergenz eines Verfahrens von W. Bartky zur Berechnung von bestimmten Integralen.

Von *Horst Tietz* in Braunschweig.

## Problemstellung.

Walter Bartky[1]) wendet die Landensche Transformation auf Integrale an, die er wegen ihrer Gestalt

$$I(m, n) = \int_0^{\pi/2} \frac{F(R)}{R}\, d\Phi \tag{1}$$

mit

$$R^2 = m^2 \cos^2\Phi + n^2 \sin^2\Phi \tag{2}$$

als verallgemeinerte vollständige elliptische Integrale bezeichnet[2]).

Er setzt

$$m_0 = m,\ n_0 = n,\ R_0 = R,\ F_0 = F,\ \Phi_0 = \Phi,\ I_0 = I$$

und definiert rekursiv $m_i$, $n_i$, $R_i$, $F_i$, $\Phi_i$, $I_i$ durch

$$\left\{\begin{aligned} m_i &= \frac{1}{2}(m_{i-1} + n_{i-1}),\quad n_i = (m_{i-1}\, n_{i-1})^{1/2}, \\ R_i &= \frac{1}{2}\left(R_{i-1} + \frac{n_i^2}{R_{i-1}}\right) \text{ oder } R_{i-1}^{\pm} = R_i \pm (R_i^2 - n_i^2)^{1/2}, \\ F_i(R_i) &= \frac{1}{2}\left[F_{i-1}(R_{i-1}^{+}) + F_{i-1}(R_{i-1}^{-})\right], \\ R_i^2 &= m_i^2 \cos^2\Phi_i + n_i^2 \sin^2\Phi_i, \\ I_i(m_i, n_i) &= \int_0^{\pi/2} \frac{F_i(R_i)}{R_i}\, d\Phi_i. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Er beweist dann elementar, daß die Folge der Integrale $I_i(m_i, n_i)$ konstant ist:

$$I_i(m_i, n_i) = I(m, n) \text{ für alle } i. \tag{4}$$

---

[1]) *W. Bartky*, Numerical calculation of a generalized complete elliptic integral. Rev. of Mod. Phys. **10** (1938), p. 264—269.

[2]) Übrigens kann jedes Integral $\int_n^m G(R)\, dR$ mittels (2) und $F(R) = G(R)\ [(m^2 - R^2)(R^2 - n^2)]^{1/2}$ auf die Gestalt (1) gebracht werden.

Mit wachsendem $i$ nähern sich $m_i$ und $n_i$, und damit auch $R_i$, schnell einem gemeinsamen Grenzwert $m_L$, dem arithmetisch-geometrischen Mittel von $m$ und $n$.

Bartky schreibt dann: *Weiter kann bewiesen werden, daß für eine stetige Funktion $F(R)$*

$$\lim F_i(R_i) = \lim F_i(m_L)$$

*eine bestimmte Konstante ist, so daß die Integranden von $I_i(m_i, n_i)$ sich einer Konstanten nähern, und man erhält*

$$I(m,n) = \frac{\pi}{2m_L} \lim F_i(m_L). \tag{5}$$

Diese Behauptung soll hier bewiesen werden. Zuvor jedoch einige Worte über die Leistungsfähigkeit der Bartkyschen Methode.

Für $i=3$ erhält man nach Bartky folgende schon erheblich genaue Näherungsformel:

$$I(m,n) = \frac{\pi}{8m_3}\left\{\frac{1}{2}[F(m)+F(n)] + F(n_1) + F(m') + F(n')\right\} \tag{6}$$

$$\text{mit } m',\ n' = n_2 \pm (n_2^2 - n_1^2)^{1/2}.$$

Da man stets $0 < n < m = 1$ annehmen kann, ist es für den Gebrauch von (6) zweckmäßig, eine Tafel aufzustellen, die $m_3$, $n_1$, $m'$, $n'$ in Abhängigkeit von $n$ liefert. Eine solche fünfstellige Tafel, in der $n$ um 0,01 fortschreitet, teilt Bartky mit.

Als Beispiel werde das vollständige Integral 3. Gattung

$$\Pi_1\left(1, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{(1+\sin^2\Phi)\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\Phi}}$$

berechnet. Es ist zu setzen

$$m = 1,\ n^2 = \frac{3}{4},\ R^2 = 1 - \frac{1}{4}\sin^2\Phi,\ F(R) = \frac{1}{1+4(1-R^2)}.$$

Mit

$$n = 0{,}8660254,\ m_3 = 0{,}9318084,\ n_1 = 0{,}9306049,\ m' = 0{,}9791449,\ n' = 0{,}8844712$$

erhält man

$$\frac{1}{2}[F(m)+F(n)] = 0{,}7500000,\ F(m') = 0{,}8582944,\ F(n_1) = 0{,}6510846,\ F(n') = 0{,}5345182$$

und damit

$$\Pi_1\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8m_3} \cdot 2{,}7938972 = 1{,}177454.$$

Die Berechnung aus den Integralen 1. und 2. Gattung[3]) mittels der Legendreschen Tafeln ergibt $\Pi_1\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1{,}177447$.

Übrigens läßt sich (6) für gewisse Integraltypen, zu denen auch die vollständigen Integrale der drei Gattungen gehören, noch vereinfachen. Jedoch sei hierfür sowie für die ausführliche Diskussion der Methode mit Fehlerbetrachtung und Beispielen[4]) auf die Bartkysche Arbeit selbst verwiesen.

---

[3]) *F. Tricomi-M. Krafft*, Elliptische Funktionen, Leipzig 1948, S. 192, Formeln (3·107 IV), (3·108 IV).

[4]) Bartky berechnet z. B. in wenigen Zeilen Integrale der Form (1) mit

$$F = R^{-1} + mnR^{-3},\ F = (1 + aR^{-2})(1 + bR^2 + cR^{-2})^{-3/2}$$

auf neun bzw. sieben Stellen.

## Konvergenzbeweis[5].

Da sich die Schwankung von $F$ als geeignetes Konvergenzmaß erweist, sei zunächst vorausgesetzt, daß $F(x)$ für $n \leq x \leq m$ *von beschränkter Schwankung* sei, d. h. es existiere für alle Zerlegungen $n \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_k \leq m$ die obere Grenze

$$S[F; n, m] = \overline{\text{fin}} \sum_{l=1}^{k} |F(x_l) - F(x_{l-1})|.$$

Nun wird $S[F_1; n_1, m_1]$ abgeschätzt für $F_1(R_1) = \frac{1}{2}[F(R^+) + F(R^-)]$. Es ist nach (3)

$$R^+ R^- = n_1^2 = n m,$$

und danach entsprechen sich die Intervalle

$$n_1 \leq R^+ \leq m, \; n_1 \geq R^- \geq n, \; n_1 \leq R_1 \leq m_1$$

eineindeutig. Setzt man also

$$H(R) = \frac{1}{2}\left[F(R) + F\left(\frac{n_1^2}{R}\right)\right],$$

so ist

$$F_1(R_1) = H(R^+) = H(R^-),$$

und es folgt einerseits

$$S[H; n, m] \leq S[F; n, m]$$

und andererseits

$$S[F_1; n_1, m_1] = S[H; n, n_1] = S[H; n_1, m].$$

Da nun

$$S[H; n, m] = S[H; n, n_1] + S[H; n_1, m]$$

ist, folgt somit

$$S[F_1; n_1, m_1] \leq \frac{1}{2} S[F; n, m].$$

Wird $F_i$ durch $R_i(\Phi)$ auf das Intervall $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$ bezogen, so werde die Schwankung einfach mit $S[F_i]$ bezeichnet. Es ist $S[F_i] = S[F_i; n_i, m_i]$, und Iteration der obigen Abschätzung ergibt

$$S[F_i] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i S[F]. \tag{7}$$

---

[5]) Herrn H. Kneser verdanke ich den Hinweis, daß der Beweis allgemeiner geführt werden kann als im Text angegeben, wenn man in $I_i(m_i, n_i)$ als unabhängige Veränderliche das Integral 1. Gattung einführt durch

$$u_i = \int_0^{\Phi_i} \frac{d\Phi_i}{R_i} \Big/ \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi_i}{R_i}.$$

Zunächst folgt aus (4) für alle $i$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi_i}{R_i} = \frac{\pi}{2 m_L}.$$

Setzt man nun $F_i(R_i) = \frac{\pi}{2 m_L} f_i(u_i)$, so gehen die Formeln (3) über in die einfachen Formeln

$$u_{i-1}^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm u_i)$$

$$f_i(u_i) = \frac{1}{2}[f_{i-1}(u_{i-1}^{+}) + f_{i-1}(u_{i-1}^{-})] \tag{3'}$$

$$I_i(m_i, n_i) = \frac{\pi}{2 m_L} \int_0^1 f_i(v)\, dv.$$

Hiernach ist $f_n(u_n)$ eine Riemannsche Summe zum Integral $\int_0^1 f(v)\, dv$, und zwar zur Zerlegung des Intervalles in $2^n$ gleiche Teile. Daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung für *integrierbares* $f(v)$.

Während diese Uniformisierung — soll sie nicht als Kunstgriff erscheinen — einige höhere Kenntnisse voraussetzt, ist hier das Ziel, die Bartkysche Behauptung *direkt* an den Formeln (3) zu beweisen.

Nach (3) ist jede Schranke von $F_i$ auch Schranke von $F_k$ für alle $k \geq i$, d. h. für alle $j, k \geq i$ und für beliebige $\Phi$ und $\Phi'$ ist

$$|F_j(R_j(\Phi)) - F_k(R_k(\Phi'))| \leq \overline{\text{fin}}\, F_i - \underline{\text{fin}}\, F_i.$$

Andererseits ist

$$\overline{\text{fin}}\, F_i - \underline{\text{fin}}\, F_i \leq S[F_i],$$

also nach (7)

$$|F_j(R_j(\Phi)) - F_k(R_k(\Phi'))| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i S[F]. \tag{8}$$

Dies besagt aber gerade, daß die Funktionenfolge $F_i(R_i(\Phi))$ *gleichmäßig* gegen eine Konstante $F_L$ konvergiert. Daher gilt nach (4)

$$I(m,n) = \frac{\pi}{2\, m_L} F_L.$$

Da auch $\lim F_i(R_i(\Phi^{(i)})) = F_L$ ist bei beliebiger Argumentfolge $\Phi^{(i)}$, erhält man schließlich

$$F_L = \lim F_i(m_L)$$

und damit (5), wenn man die $\Phi^{(i)}$ so wählt, daß stets $R_i(\Phi^{(i)}) = m_L$ ist.

Der Beweis für *stetiges* $F(R)$ wird auf den vorigen zurückgeführt mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes in folgender Fassung:

Jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion kann dort durch Funktionen von beschränkter Schwankung[6]) gleichmäßig approximiert werden.

$p(R)$ sei also von beschränkter Schwankung und zu $\varepsilon > 0$ so bestimmt, daß

$$|F(R) - p(R)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Wendet man (3) auf $F$ und $p$ an, so folgt für alle $i$

$$|F_i(R_i) - p_i(R_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $j, k \geq i$ und beliebige $\Phi$ und $\Phi'$ ist also hier nach (8)

$$\begin{aligned} &|F_j(R_j(\Phi)) - F_k(R_k(\Phi'))| \\ &\leq |F_j(R_j(\Phi)) - p_j(R_j(\Phi))| + |F_k(R_k(\Phi')) - p_k(R_k(\Phi'))| + |p_j(R_j(\Phi)) - p_k(R_k(\Phi'))| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \left(\frac{1}{2}\right)^i S[p] \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

letzteres, wenn $i$ hinreichend groß ist.

Von hier ab gelten ungeändert die Überlegungen des vorigen Beweises.

---

[6]) Polynome haben in jedem Intervall beschränkte Schwankung.

---

Eingegangen 15. Januar 1951.

# Nachtrag zu meiner Arbeit:

# Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete[1].

Von *Ernst Mohr* in Berlin.

---

In der genannten Arbeit wird unter 2. a) das normierte (reelle) Polynom

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+x^m$$

von geradzahligem Grade $m$ durch ein Produkt von quadratischen (reellen) Faktoren

$$q_\nu(x)=s_\nu+t_\nu x+x^2 \qquad \left(\nu=1,\ldots,\frac{m}{2}\right)$$

derart approximiert, daß die Differenz

$$f(x)-\prod_{\nu=1}^{m/2} q_\nu(x)=r(x)=r_0+r_1x+\cdots+r_{m-1}x^{m-1}$$

eine möglichst kleine Koeffizientenquadratsumme

$$r^2=r^2(s_\nu,t_\nu)=\sum_{\mu=0}^{m-1} r_\mu^2$$

hat. Die Existenz einer solchen Approximation wird folgendermaßen begründet: „Da $r^2$ sicher eine untere Grenze hat und andererseits als Polynom in den Variablen $s_\nu$, $t_\nu$ stetig ist, so gibt es eine ‚Minimumdarstellung', in der $r^2$ seinen kleinsten Wert annimmt."

Herr O. Perron hat mich freundlicherweise darauf hingewiesen[2], daß dieser Schluß nicht bündig ist, weil das (sicher vorhandene) Minimum von $r^2$ in einem beschränkten abgeschlossenen Bereich, etwa $\sum_{\nu=1}^{m/2}(s_\nu^2+t_\nu^2)\leq R^2$, möglicherweise auf dem Rande liegen und für $R\to\infty$ monoton abnehmen kann. Es wäre demnach noch zu zeigen, daß man die Variabilität der $s_\nu$, $t_\nu$ (bei festem $f(x)$) von vornherein auf einen beschränkten abgeschlossenen Bereich einschränken kann. Das soll im folgenden geschehen.

Wegen

$$r^2(0,0)=\sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu^2=a$$

---

[1]) Dies. Journ. 184 (1942), 175–177.

[2]) in einem Brief vom 6. April 1951.

kann man in der Tat für die in Rede stehende Minimalaufgabe die Variabilität der $s_\nu, t_\nu$ von vornherein durch die Zusatzforderung

$$(1) \qquad r^2(s_\nu, t_\nu) = \sum_{\mu=0}^{m-1} r_\mu^2 \leq a$$

einschränken. Diese Zusatzforderung bedeutet aber, wie nachstehend gezeigt wird, daß die $s_\nu$, $t_\nu$ selbst absolut unter einer festen nur von $m$ und $a$ (also nur von dem festen $f(x)$) abhängigen Schranke liegen.

Unter der Voraussetzung (1) sind zunächst die Koeffizienten des Polynoms

$$(2) \qquad A(x) = \prod_{\nu=1}^{m/2} q_\nu(x) = f(x) - r(x) = \sum_{\mu=0}^{m-1} (a_\mu - r_\mu) x^\mu + x^m$$

absolut beschränkt, nämlich vom letzten 1 abgesehen, sämtlich absolut $\leq 2\sqrt{a}$.

Weil insbesondere für den ersten Koeffizienten

$$\prod_{\nu=1}^{m/2} |s_\nu| = |a_0 - r_0| \leq 2\sqrt{a}$$

gilt, hat man für mindestens eine der Zahlen $s_\nu$, etwa für $s_1$, notwendig

$$|s_1| \leq \sqrt[m]{4a}.$$

Ist nun das zugehörige quadratische Polynom $q_1(x) = s_1 + t_1 x + x^2$ reell irreduzibel, also $t_1^2 - 4s_1 < 0$, so ist auch der andere Koeffizient $t_1$ absolut beschränkt, nämlich

$$|t_1| < 2\sqrt{s_1} \leq 2\sqrt[2m]{4a}.$$

Ist aber

$$q_1(x) = q_1'(x)\, q_1''(x) = (\sigma_1' + x)(\sigma_1'' + x)$$

reell reduzibel, so hat man wegen $\sigma_1' \sigma_1'' = s_1$ für den Koeffizienten eines der beiden Faktoren, etwa $q_1'(x)$, notwendig

$$|\sigma_1'| \leq \sqrt{s_1} \leq \sqrt[2m]{4a}.$$

In jedem Falle ist damit in dem Polynom $A(x)$ aus (2) ein normierter Teiler zweiten Grades $B(x) = q_1(x)$ oder ersten Grades $B(x) = q_1'(x)$ nachgewiesen, dessen Koeffizienten absolut unter einer nur von $m$ und $a$ abhängigen Schranke liegen. Letzteres gilt dann aber auch für die Koeffizienten des zugehörigen komplementären Teilers $C(x)$.

Allgemein folgt nämlich aus einer Polynomzerlegung

$$A_0 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} + x^n = (B_0 + \cdots + B_{k-1} x^{k-1} + x^k)(C_0 + \cdots + C_{l-1} x^{l-1} + x^l)$$

mit

$$|A_\nu| \leq M \ (\nu = 0, \ldots, n-1), \quad |B_\varkappa| \leq M \ (\varkappa = 0, \ldots, k-1)$$

vermöge der Gleichungen

$$A_{(l-1)+k} = C_{l-1} + B_{k-1},$$

$$A_{(l-2)+k} = C_{l-2} + B_{k-1} C_{l-1} + B_{k-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{0+k} = C_0 + B_{k-1} C_1 + B_{k-2} C_2 + \cdots + B_{k-l},$$

wobei $B_\varkappa = 0$ für $\varkappa < 0$ zu verstehen ist, daß $C_{l-1}, \ldots, C_0$ absolut unterhalb einer nur von $l$ und $M$ abhängigen Schranke liegen.

Indem man die oben für $A(x)$ durchgeführte Abspaltung eines Faktors $B(x) = q_1(x)$ oder $q_1'(x)$ nunmehr für das verbliebene Polynom $C(x)$ durchführt und so fortfährt, erkennt man, daß die Koeffizienten der reellen Primfaktoren von $A(x)$ sämtlich absolut unter einer nur von $m$ und $a$ abhängigen Schranke liegen. Dies gilt dann natürlich auch für die Koeffizienten $s_\nu$, $t_\nu$ der reellen quadratischen Faktoren $q_\nu(x)$, die $A(x)$ zusammensetzen. Damit ist der noch erforderliche Nachweis erbracht.

Zum Schluß noch einige Richtigstellungen zum Text der eingangs genannten Arbeit, die ich im wesentlichen ebenfalls Herrn Perron verdanke. S. 176, Z. 12 ist „Gebiet" durch „offene Punktmenge" zu ersetzen. Die Fußnoten [2]) und [4]) sind zu streichen, da es sich um einen rein-analytischen Satz über implizite Funktionen handelt und die Ableitungen in der Funktionaldeterminante dann zweckmäßigerweise ebenfalls analytisch definiert werden. S. 176, Z. 20 ist es vorteilhaft, von den Gradzahlen $p$, $q$ zu fordern, daß sie „fest" und „$> 1$" seien. S. 176, Z. 5 v. u. lies $m$ statt $n$. S. 175, Z. 7 v. u. streiche links die Klammern.

Es sei mir gestattet, Herrn Perron meinen herzlichen Dank für seine freundliche Kritik auszusprechen.

---

Eingegangen 2. Juli 1951.

r von

$q_1(x)$
t, er-
solut
auch
men-

esent-
setzen.
tionen
ytisch
„$>1$“

liche